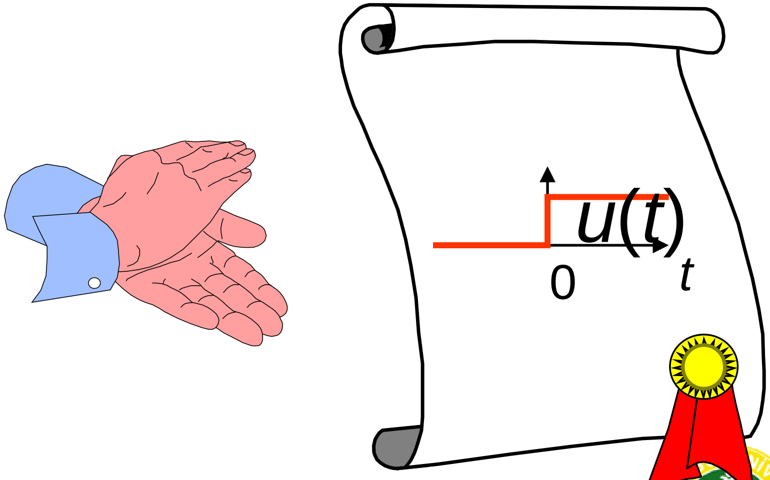
II. BAZI BASİT FONKSİYONLARIN TANIMI

13.10.2011

1. Delta Fonksiyonu,
2. Basamak Fonksiyonu (step),
3. Üçgen Fonksiyonu,
4. Kare Fonksiyonu.

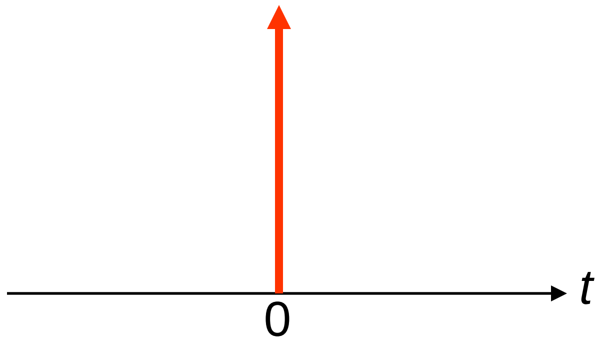


1. Delta Fonksiyonu, Dirac Delta Fonksiyonu, birim impuls (unit impulse) fonksiyonu

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

ve

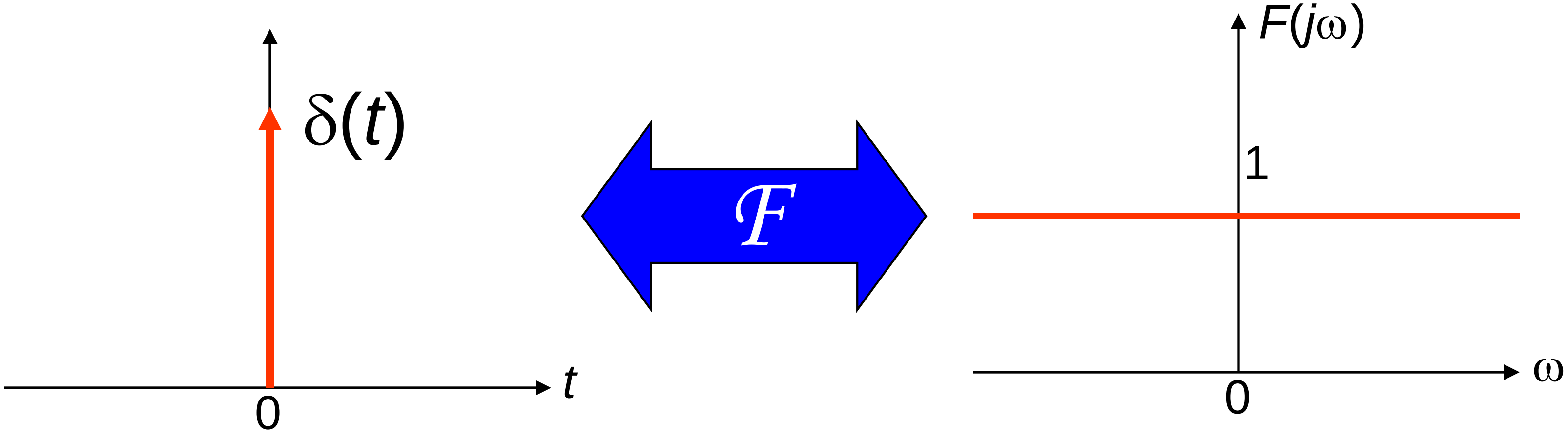
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$



Delta Fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt \ = e^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = 1$$

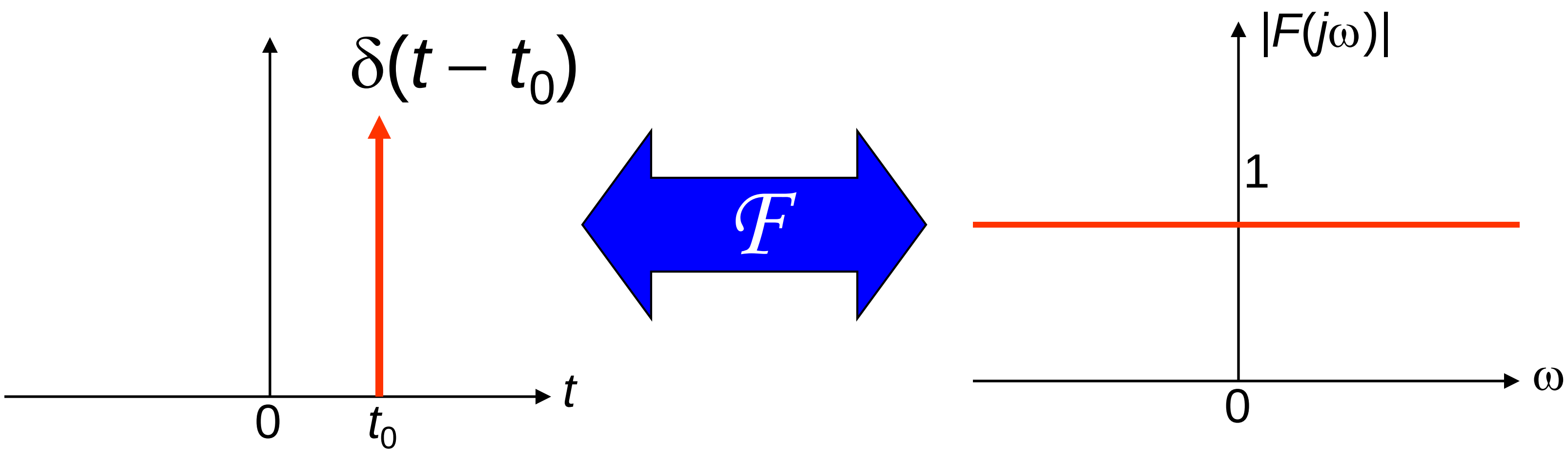


II. BAZI BASİT FONKSİYONLARIN TANIMI

Kaydırılmış Delta Fonksiyonu ve Fourier dönüşümü

$$\boxed{\delta(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0}}$$

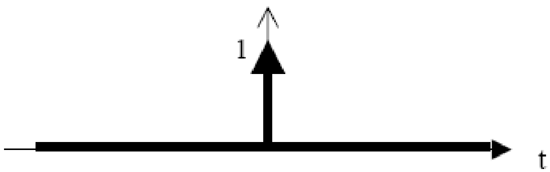
$$\mathcal{F}[f(t-t_0)] = F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$ özelliğinden



Exercise 3: Unit Impulse Signal Generation

An impulse is defined as follows:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & elsewhere \end{cases}$$



The following Matlab program generates a unit impulse signal.

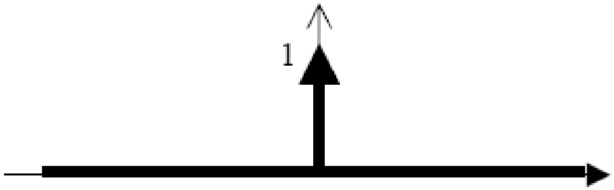
```
% Program W2E3.m
% Generating 64 Samples of a unit impulse signal
N=64;                    % Define the number of samples
n=-(N/2):((N/2)-1);      % Define a vector of sample numbers
x=zeros(1,N);            % Define a vector of zeros
x((N/2)+1)=1.0;          % Make the first sample to be 1 (i.e.at
t=0)
plot(n,x);               % Plot the impulse
grid;
title('A Unit Impulse Signal');
xlabel('Sample Number');
ylabel('Amplitude');
```

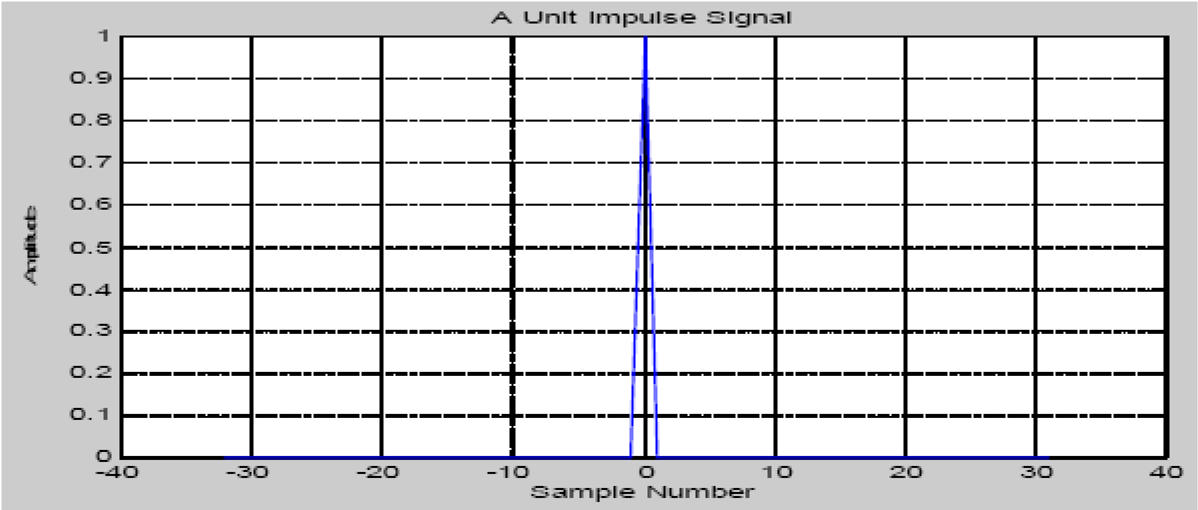
II. BAZI BASİT FONKSİYONLARIN TANIMI

Exercise 3: Unit Impulse Signal Generation

An impulse is defined as follows:

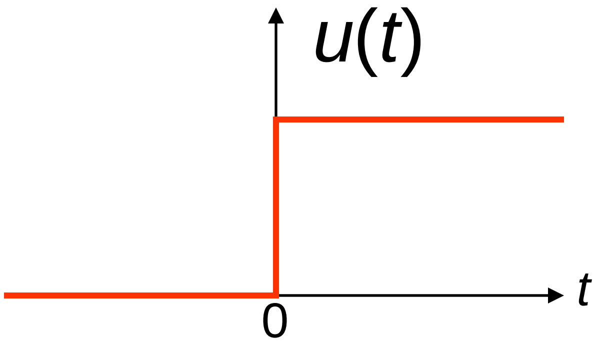
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & elsewhere \end{cases}$$



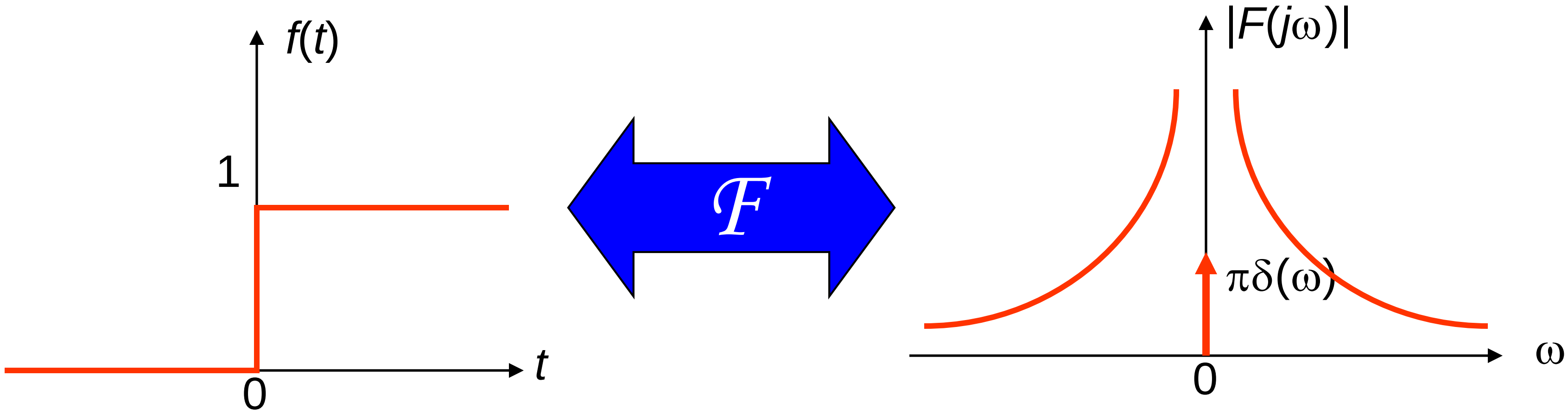


2. Basamak Fonksiyonu (step), birim basamak (unit step) fonksiyonu

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Birim basamak Fonksiyonunun Fourier dönüşümü

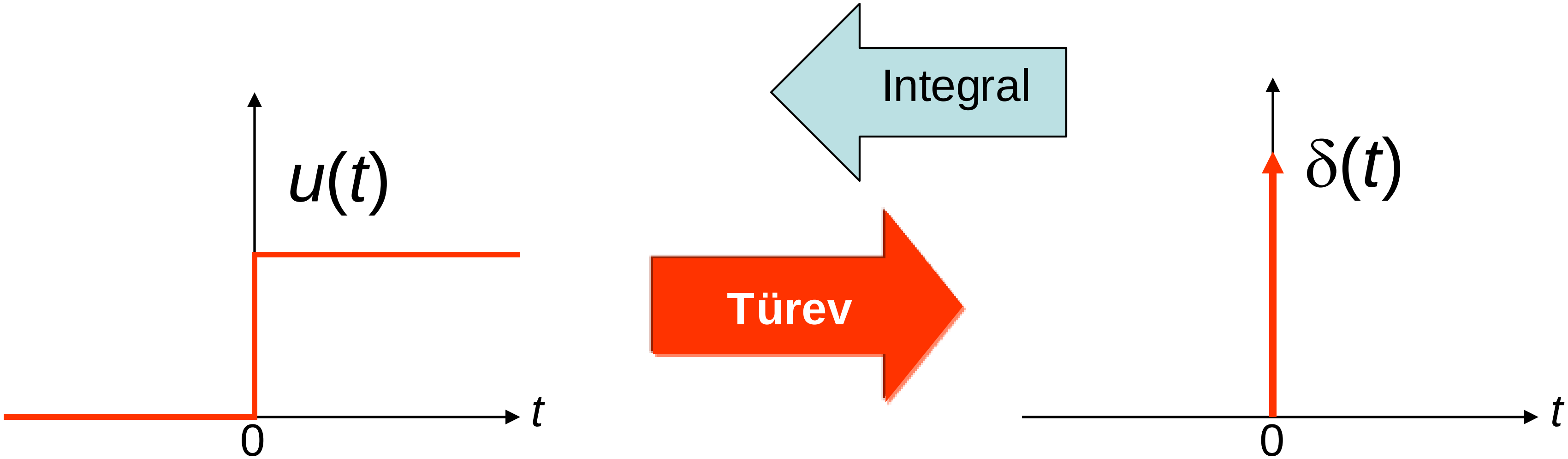


$$\boxed{u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}$$

II. BAZI BASİT FONKSİYONLARIN TANIMI

Birim basamak Fonksiyonunun türevi ?

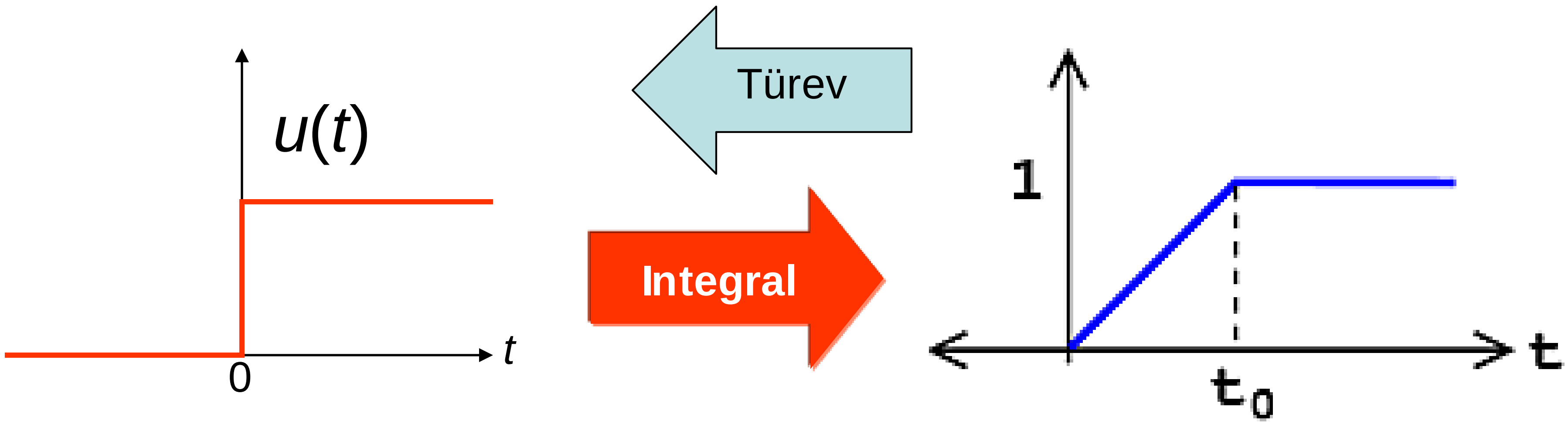
Dirac Delta fonksiyonunun integrali ?



II. BAZI BASİT FONKSİYONLARIN TANIMI

Birim basamak fonksiyonunun integrali ?

Tırmanma fonksiyonunun türevi ?

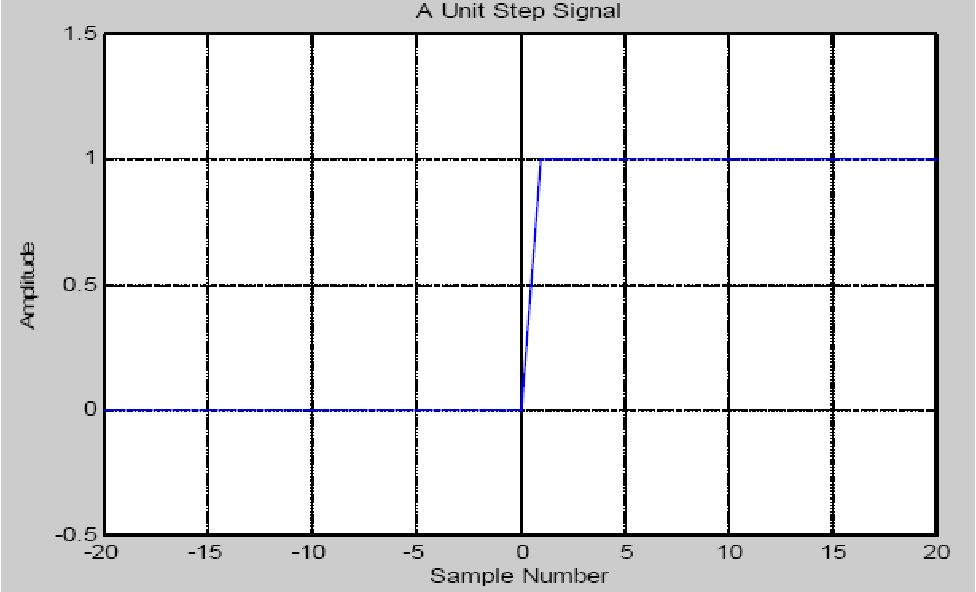


Unit Step Signal Generation

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

The following Matlab Program generates and plots a unit step signal:

```
% Program: W2E4.m
% Generates 40 samples of a unit step signal, u(n)
N=40;           % Define the number of samples
n=-20:20;       % Define a suitable discrete time axis
u=[zeros(1,(N/2)+1),ones(1,(N/2))];   % Generate the
signal
plot(n,u);                            % Plot the signal
axis([-20,+20,-0.5,1.5]);             % Scale axis
grid;
title('A Unit Step Signal');
xlabel('Sample Number');
ylabel('Amplitude');
```



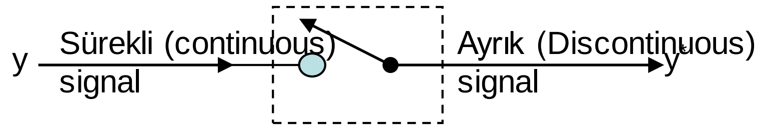
II. BAZI BASİT FONKSİYONLARIN TANIMI

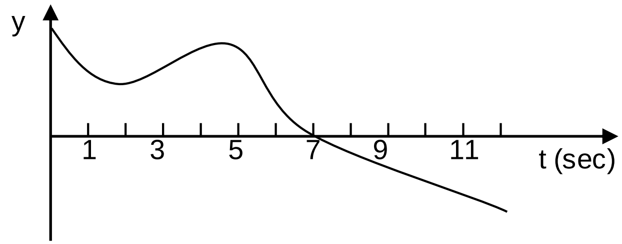
Haftaya (20.10.2011) !!!!

3. Üçgen Fonksiyonu,
4. Kare Fonksiyonu.

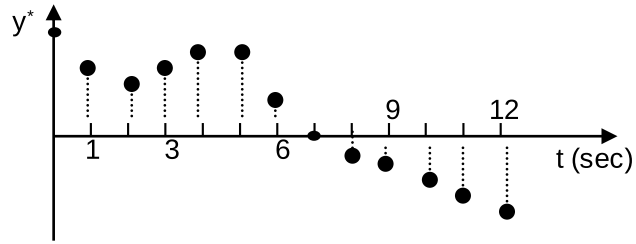
....

II. BAZI BASİT FONKSİYONLARIN TANIMI

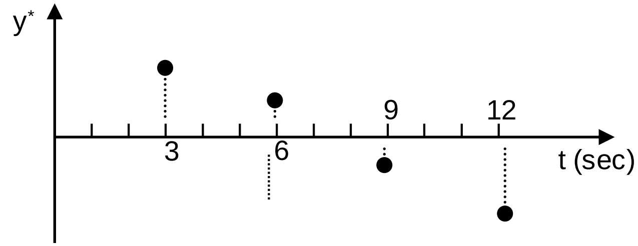




(a)



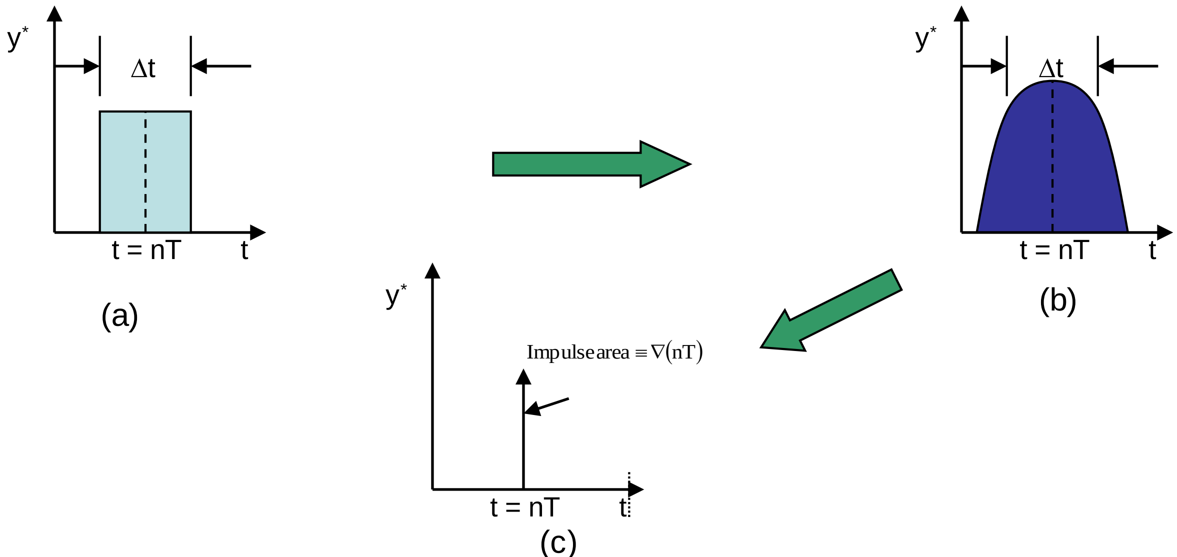
(b)



(c)

- Sürekli sinyal (Continuous signal) ve farklı örnekleme aralıkları ile onun ayrık hale gelmiş hali

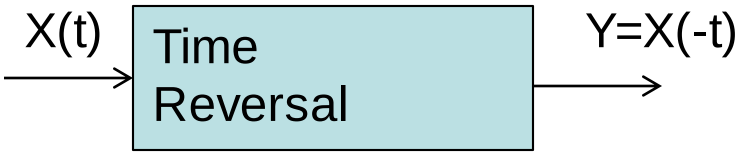
II. BAZI BASİT FONKSİYONLARIN TANIMI

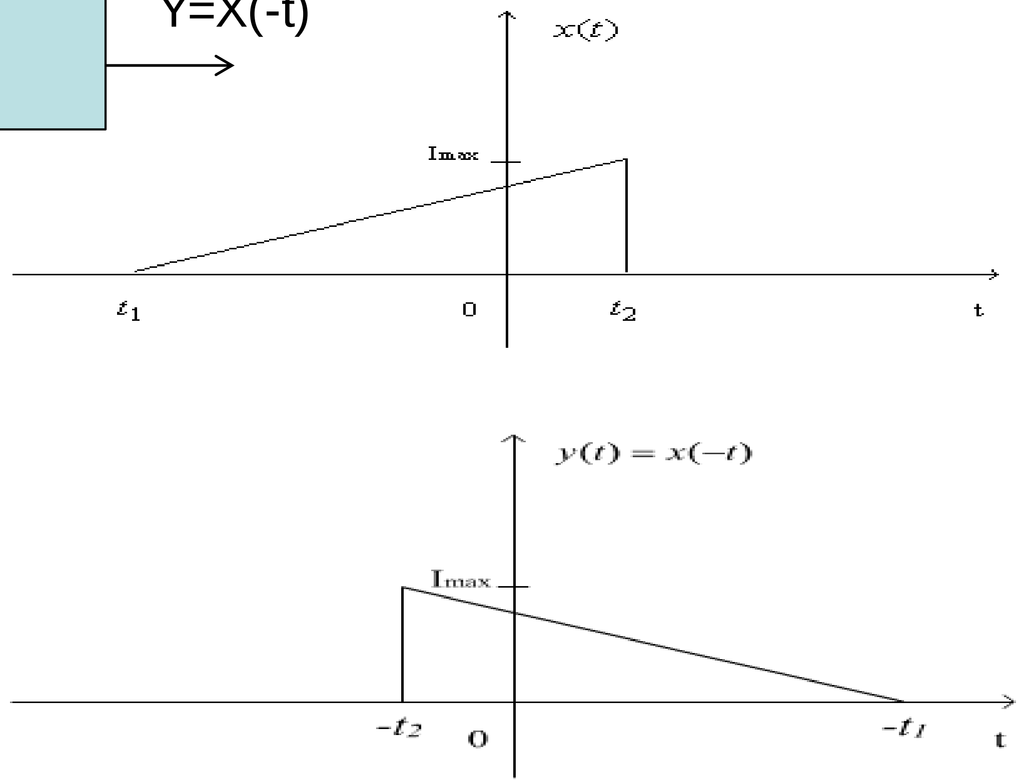


- From the response of a real sampler to the response of an ideal impulse sample

II. BAZI BASİT FONKSİYONLARIN TANIMI

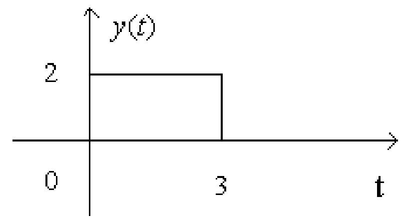
Time reversal:

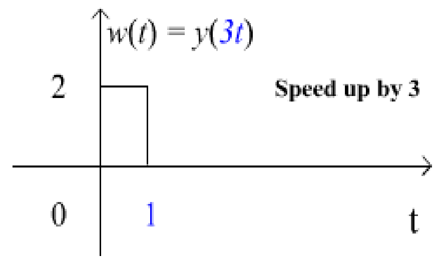


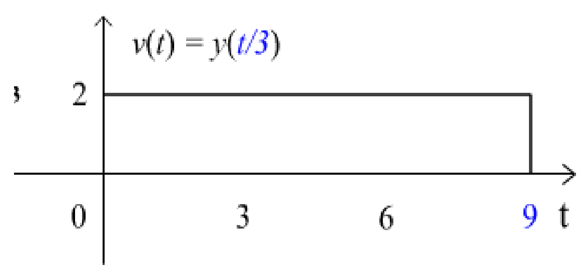


Time scaling

- Given $y(t)$,
  - find $w(t) = y(3t)$
  - $v(t) = y(t/3)$.



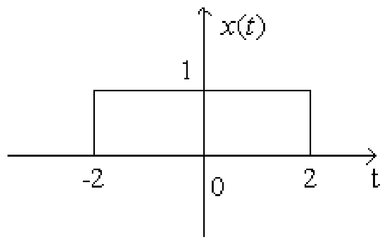




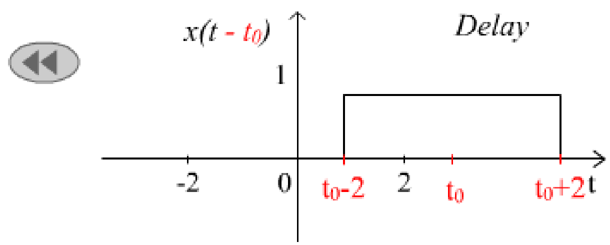
Time Shifting

- The original signal $x(t)$ is shifted by an amount $t0$.

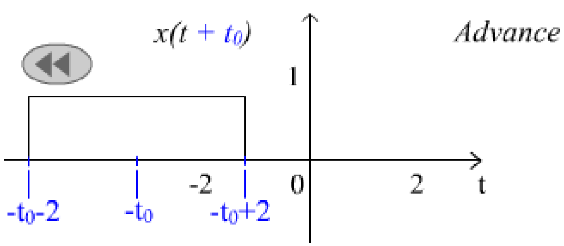
Time Shift: y(t)=x(t-to)



- X(t)→X(t-to) // to>0 →Signal Delayed→ Shift to the right



- X(t)→X(t+to) // to<0 →Signal Advanced→ Shift to the left



II. BAZI BASİT FONKSİYONLARIN TANIMI

II. BAZI BASİT FONKSİYONLARIN TANIMI

20.10.2011

Basit Fonksiyonlar

- ✓ Basamak Fonksiyonu $H(x)$

Tırmanma Fonksiyonu $x.H(x)$

İşaret Fonksiyonu Sgn x

Süzgeç veya Yuvarlatma Fonksiyonu Sinc x

Üçgen Fonksiyon $\Lambda(x)$

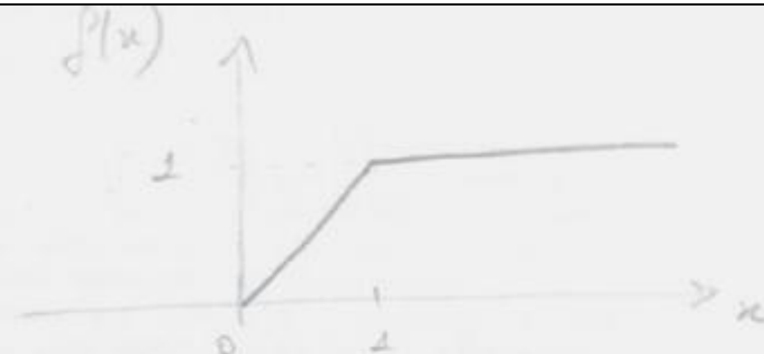
Kare Fonksiyon $\Pi(x)$

- ✓ Birim impuls Fonksiyonu

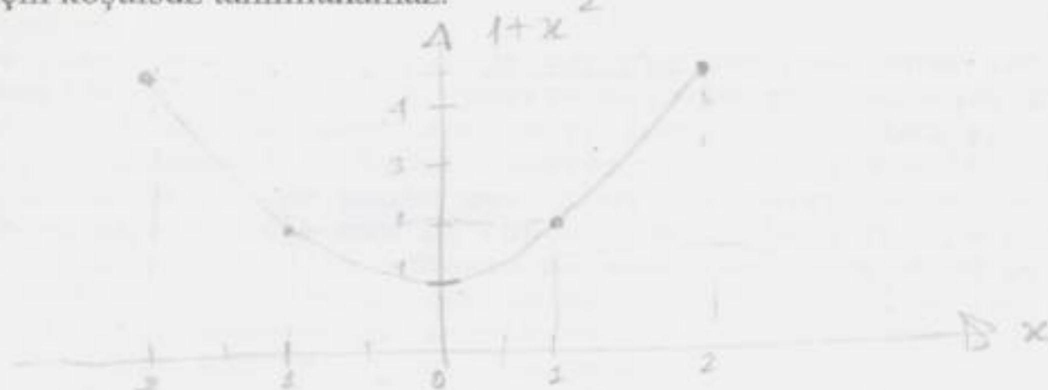
II. BAZI BASİT FONKSİYONLARIN TANIMI

Fourier analizi Jeofizikte veri işlemin temelini oluşturur. Fourier analizinde kullanılarn birçok yararlı fonksiyon, ani değişimlerinden ötürü tek tek tanımlanmak durumundadır. Örnek olarak aşağıdaki koşullarla tanımlanan f(x) fonksiyonu ile $1+x^2$ fonksiyonunu karşılaştırabiliriz.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



Görüldüğü gibi, f(x) basit bir fonksiyon olmasına ragmen $1+x^2$ de olduğu gibi x 'in her değeri için koşulsuz tanımlanamaz.



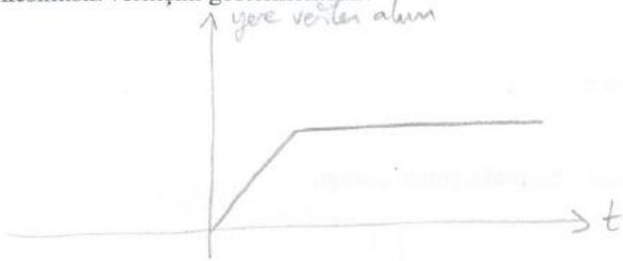
II. BAZI BASİT FONKSİYONLARIN TANIMI

Bu tür fonksiyonların matematiksel açıdan kullanılması kolay olmamakla birlikte, fiziksel olayları açıkladıklarından özel olarak tanımlanıp isimlendirilirler. Örneğin;

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

fonksiyonu "eğimli basamak" fonksiyonu olarak tanımlanabilir. Çevremizde bu fonksiyonla açıklanabilecek bir çok olgu sayılabilir. Eğimli basamak fonksiyonu için jeofizikle ilgili örnek olarak iki elektrod kullanılarak bir reosta yardımıyla yere verilen

akım gösterilebilir. Eğrinin eğimli kısmı reostayla akımın artırılışını, düz kısım da akımın yere kesintisiz verilişini göstermektedir.



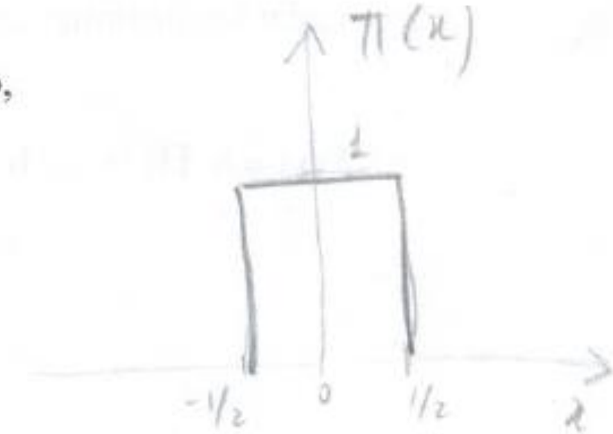
Bu fonksiyon örneğine benzer şekilde, Fourier analizinde en çok kullanılan fonksiyonları tanımlayacağız.

Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

- UZUNLUĞU ve YÜKSEKLİĞİ BİR BİRİM OLAN KARE FONKSİYON ($\Pi(x)$)

Şekilde gösterilen fonksiyon, birim uzunlukta ve yükseklikte olup,

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 1/2 \\ 1/2 & |x| = \frac{1}{2} \\ 1 & |x| < 1/2 \end{cases}$$



olarak tanımlanabilir. Bu tanımlamada yer almasına rağmen x= +- 1/2 için $\Pi(x)= 1/2$ koşulu pratik açıdan önemli değildir. Bu basitliği ile kare fonksiyon veri işlemlerde çok yaygın olarak kullanılır. Süzgeçlerin tanımlanmasında, verilerin pencerelenmesinde ve sürekli fonksiyonların belirli parçalarının incelenmesinde çok yararlıdır. Örneğin cos πx fonksiyonunun

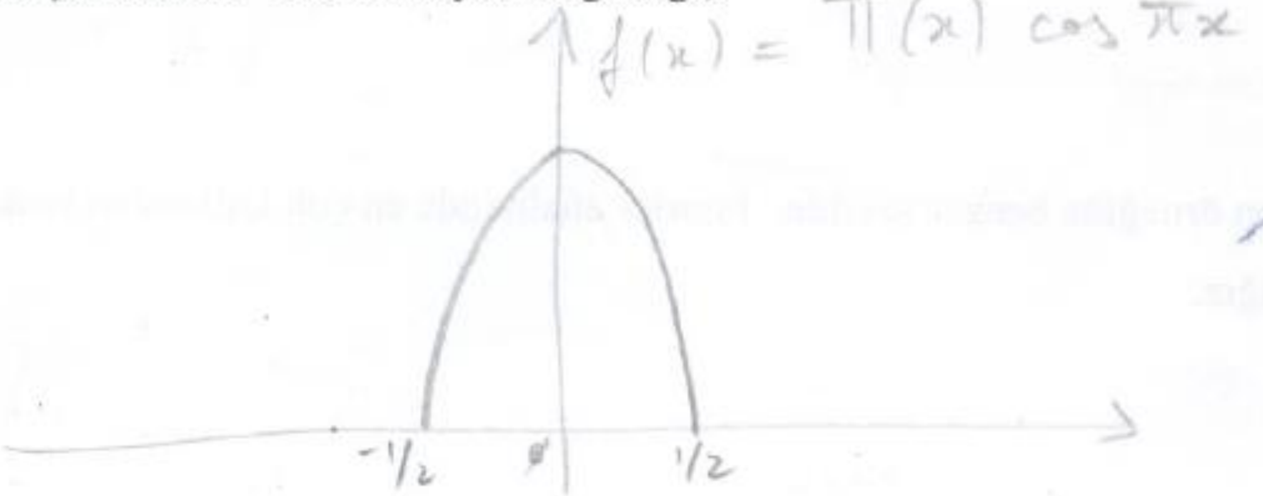
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -1/2 \\ \cos \pi x & -1/2 < x < 1/2 \\ \phi & 1/2 < x \end{cases}$$

Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

şeklinde tanımlanması halinde, bu fonksiyon, kare fonksiyon yardımıyla

$$f(x) = \prod(x)\cos \pi x$$

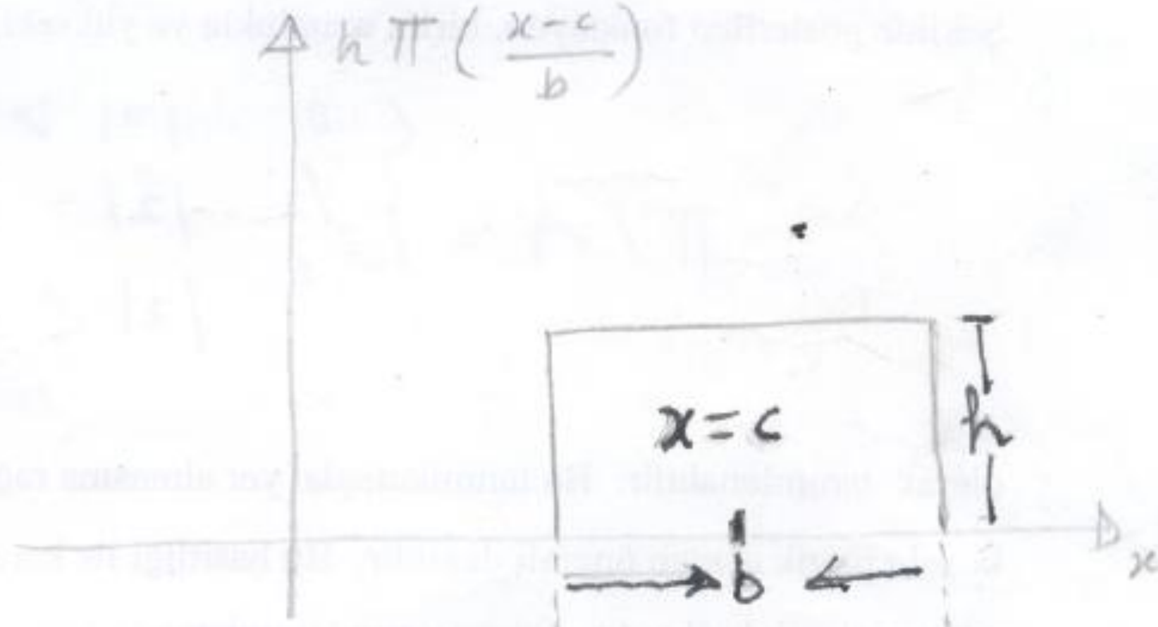
şeklinde yazılabilir. Bu fonksiyonun grafiği;



Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

Kare fonksiyonun daha kullanışlı olması için, yüksekliği ve yatay eksen üzerindeki yeri parametrelere bağlı olarak değişecek şekilde tanımlanabilir. X ekseni üzerinde $x = c$ kadar kaydırılmış, uzunluğu b ve yüksekliği h olan bir kare dalga,

$$F(x) = h \prod((x-c)/ b)$$



şeklinde yazılabilir. Bu genel tanımı ile, kare dalga verilerin seçiminde, pencerelenmesinde çok yararlıdır.

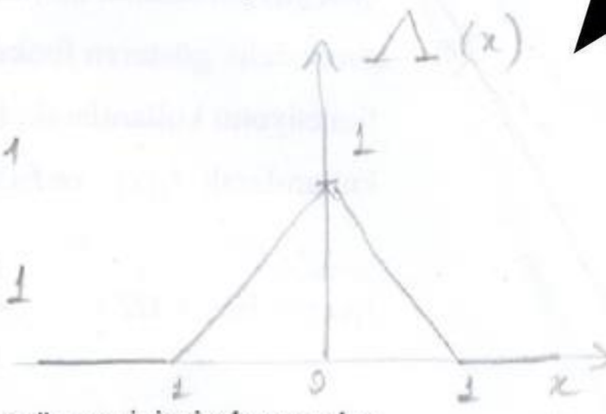
Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

- YÜKSEKLİĞİ ve YÜZEYİ BİR BİRİM OLAN ÜÇGEN FONKSİYON,

Üçgen fonksiyon,

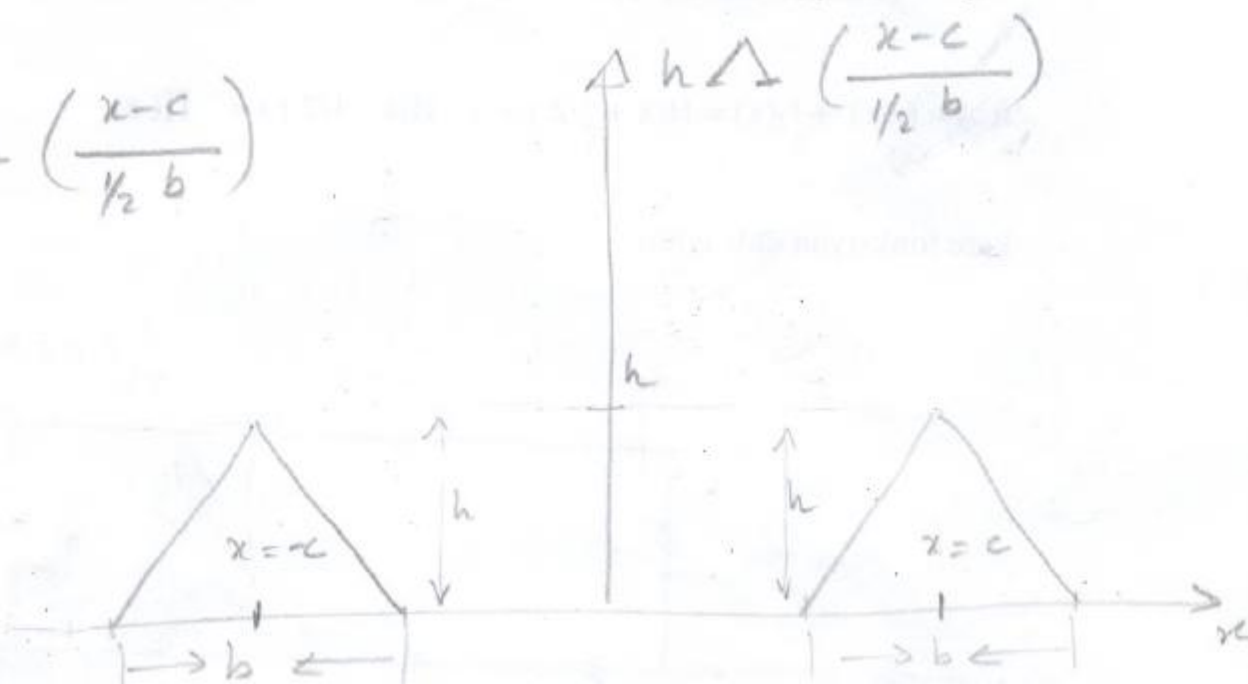
$$\Lambda(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1 - |x| & |x| < 1 \end{cases}$$

LAMDA λ



şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonun önemi, kare fonksiyonun öz-evrişimi olmasından kaynaklanır. Doğrusal parçaların oluşturduğu sürekli fonksiyonlarla ilgili kullanılırlar. X ekseni üzerindeki yeri, yüksekliği ve uzunluğu seçilebilecek şekilde üçgen fonksiyon

$$f(x) = h\,\Lambda\left(\frac{x-c}{\frac{1}{2}b}\right)$$



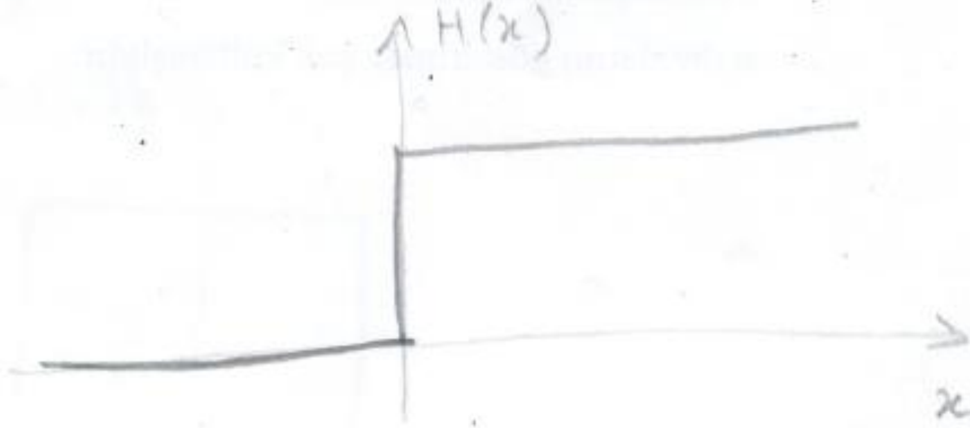
şeklinde verilir.

Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

- BİRİM BASAMAK FONKSİYON , H(x)

Basit süreksizliklerin tanımlanmasında kullanılan birim basamak fonksiyon,

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



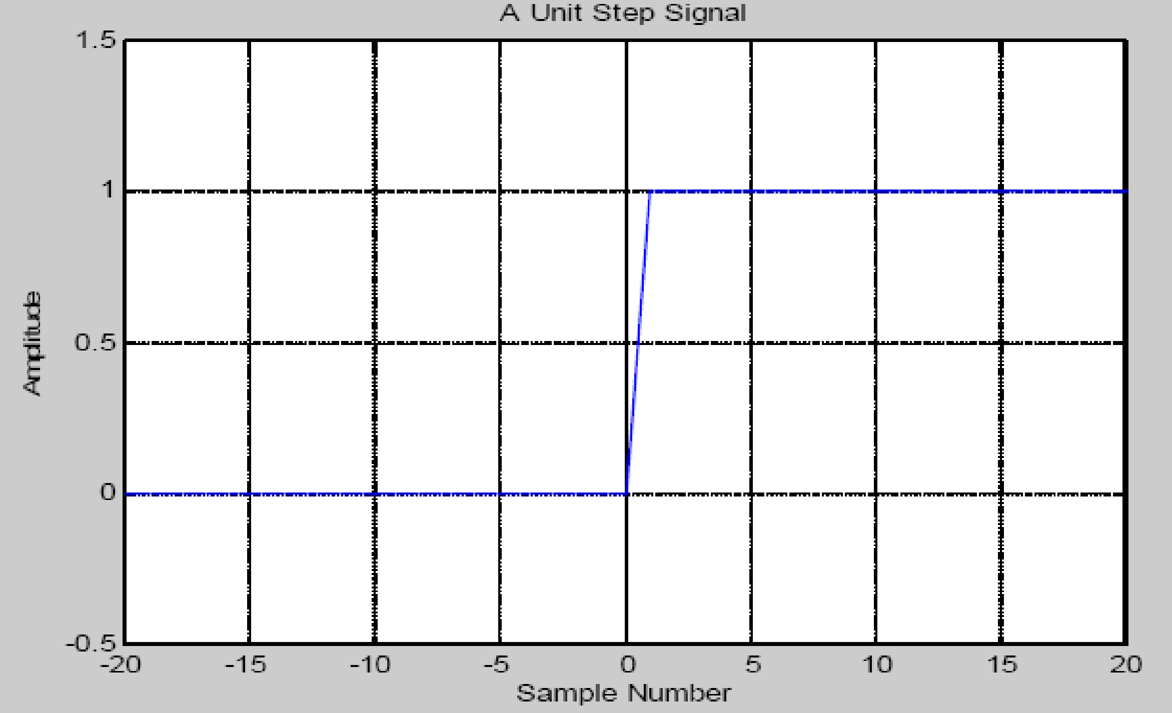
Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

Unit Step Signal Generation

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

The following Matlab Program generates and plots a unit step signal:

```
% Program: W2E4.m
% Generates 40 samples of a unit step signal, u(n)
N=40;           % Define the number of samples
n=-20:20;       % Define a suitable discrete time axis
u=[zeros(1,(N/2)+1),ones(1,(N/2))];    % Generate the
signal
plot(n,u);                             % Plot the signal
axis([-20,+20,-0.5,1.5]);              % Scale axis
grid;
title('A Unit Step Signal');
xlabel('Sample Number');
ylabel('Amplitude');
```



Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

Çok yaygın olarak, birçok fiziksel olayı a.ıklamakta kullanılan basamak fonksiyonu, ani süreksizlik gösteren fonksiyonların elde edilmesinde de yararlıdır. Örneğin, basamak fonksiyonu kullanılarak, kare fonksiyon üretilebilir. Bunun için basamak fonksiyon kullanılarak $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonları tanımlanır.

$$f_1(x) = H(x + 1/2)$$

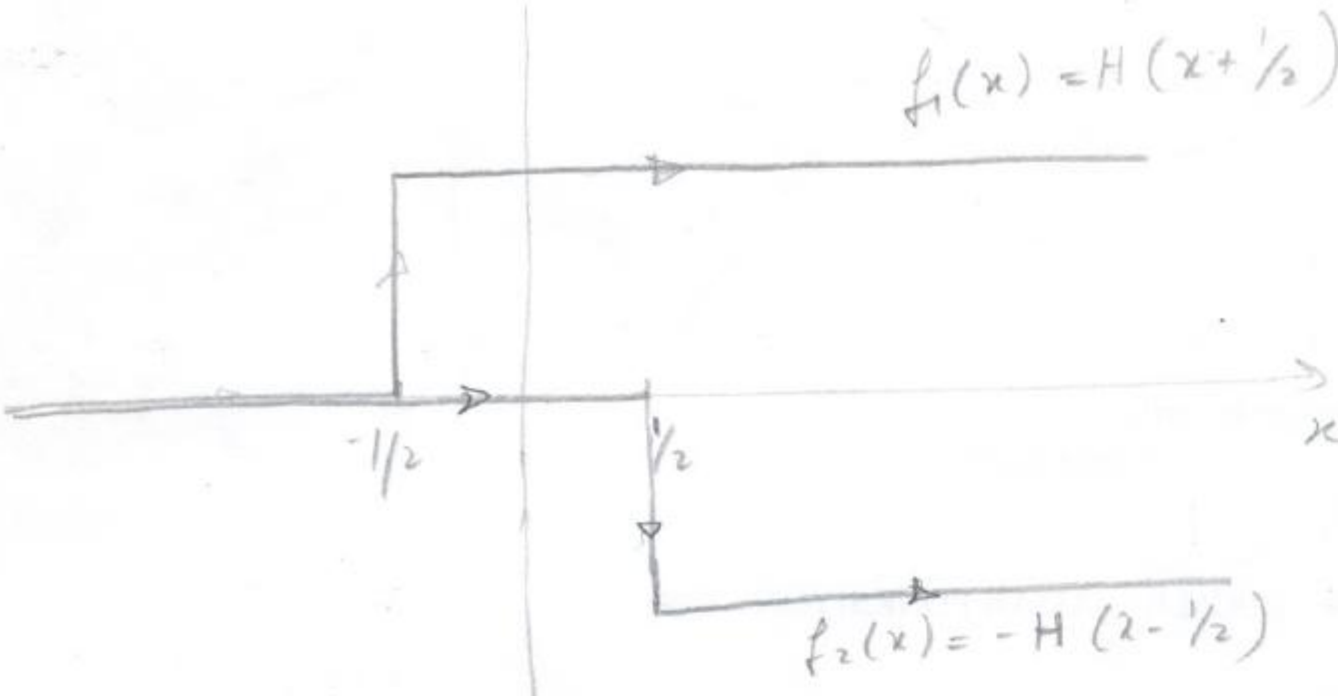
$$f_2(x) = -H(x - 1/2)$$

Bunlar çizilecek olursa, $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ toplanırsa,

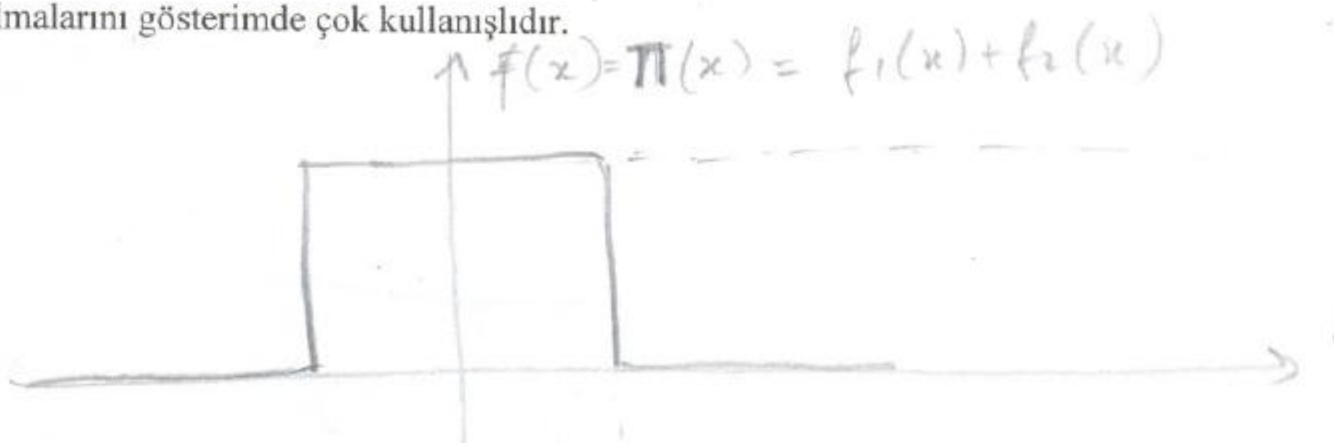
$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = H(x + 1/2) + (-H(x - 1/2)) = \prod(x)$$

kare fonksiyon elde edilir.

Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı



Basamak fonksiyonu elektrik devreleri ile ilgili anahtardaki kapanmayı veya devre açılmalarını gösterimde çok kullanışlıdır.



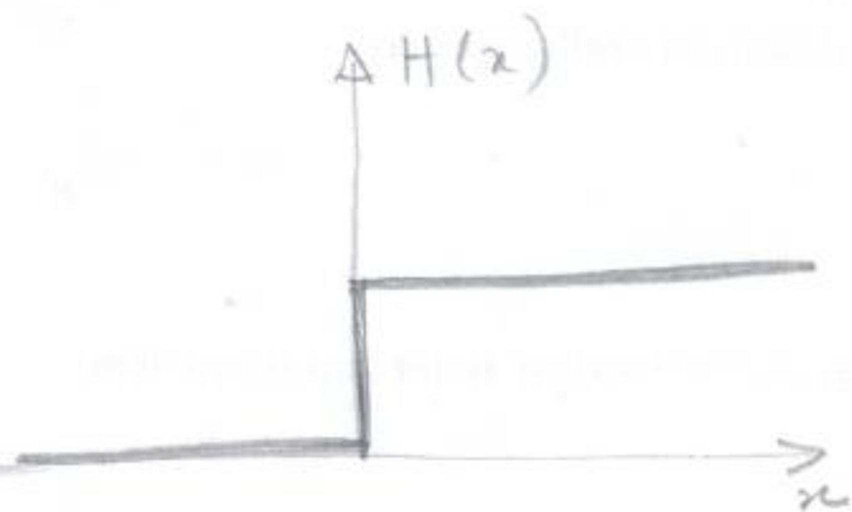
Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

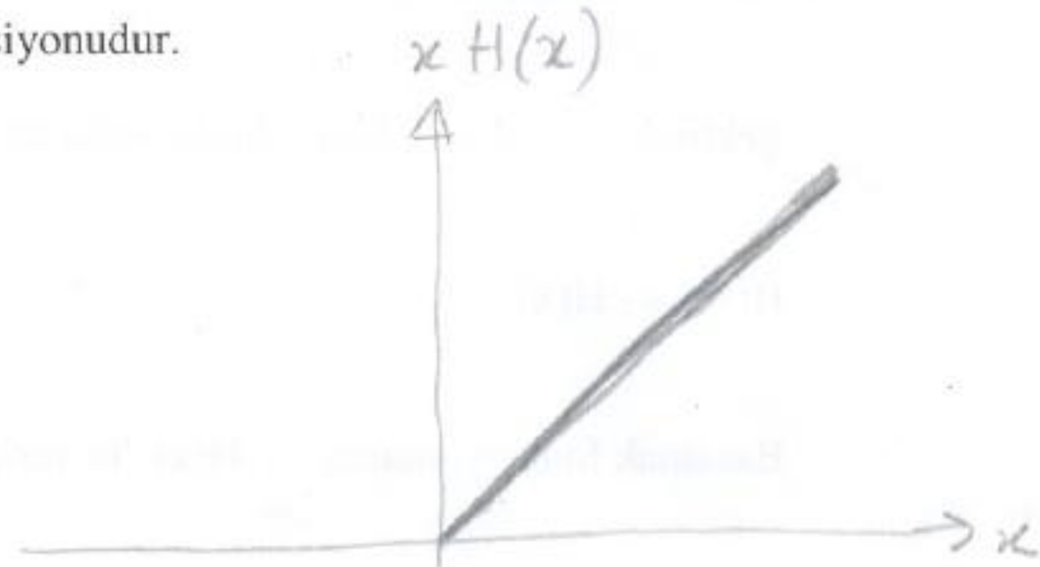
- TIRMANMA FONKSİYONU , x H(x) ;

Tırmanma fonksiyonu, basmak fonksiyonundan türetilir ve genel olarak

$R(x) = x \, . \, H(x)$

olarak verilir. Burada, H(x) basamak fonksiyonudur.





Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

- TIRMANMA FONKSİYONU , x H(x) ;

Tırmanma fonksiyonu, basamak fonksiyonunun integrali olarak da alınabilir.

$$R(x) = \int_{-\infty}^{x} H(x)\, dx$$

Böyle olunca , basamak fonksiyonu tırmanma fonksiyonunun türevi ile verilir.

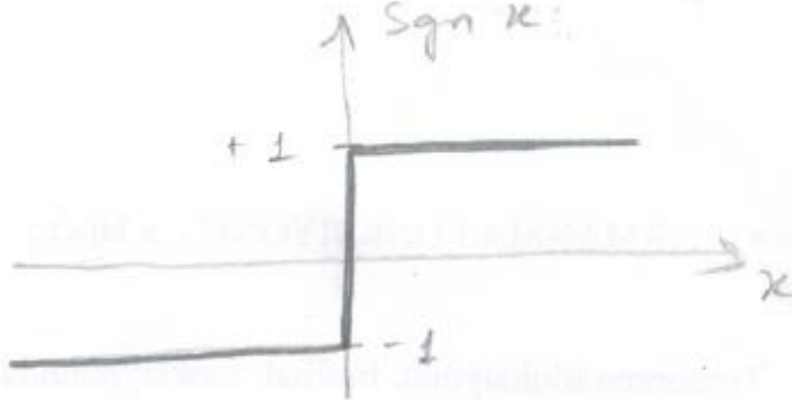
$$H(x) = R'(x) = d\,R(x) / dx$$

Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

- İŞARET FONKSİYONU , SGN X

Bu fonksiyon, x 'in negatif (eksi) değrelerinde -1 'e ve x' in pozitif (artı) değrelerinde +1'e eşittir. Yani,

$$\text{Sgn } x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



Basamak fonksiyonu H(x)' e benzerdir ve onun birçok özelliklerini taşır. Basamak fonksiyonu ile ilgisi,

$$\text{Sgn } x = 2\,H(x) - 1$$

Şeklinde verilebilir. Sgn x fonksiyonu tek fonksiyon özelliği gösterir.

Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

$H(-x) = - H(x)$

Basamak fonksiyonunda $\int_{-\infty}^{\infty} H(x)$ 'ın varlığı söylenemezken işaret fonksiyonu için,

$$\lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} \operatorname{Sgn} x \, dx = 0$$

dır.

Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

- SÜZGEÇ veya ENTERPOLASYON(YUVARLATMA) FONKSİYONU, Sinc x ;

Süzgeçleme fonksiyonu,

$$\text{Sinc } x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanım aşağıdaki özellikleri de içerir.

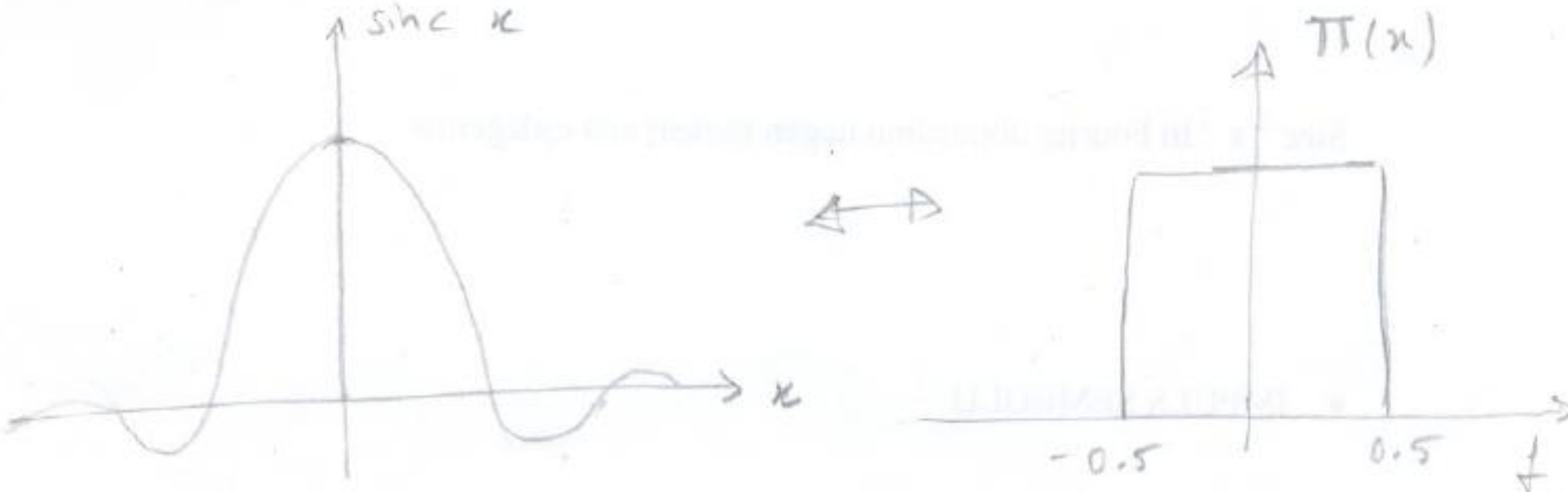
$\text{Sinc } 0 = 1$

$\text{Sinc } n = 0 \qquad n \neq 0$ (tamsayı)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sinc } x \, dx = 1$$

Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

Bu fonksiyonun özelliği, içerdiği frekanslardan açıkça görülür. Frekans içeriği açısından belirli bir frekansa kadar tüm frekans bleşenlerini taşıdığı halde, belirli frekansın ötesindeki frekansları içermez. Bu tanıma göre zaman ortamındaki Sinc x fonksiyonu frekans ortamında $\Pi(x)$ kare fonksiyonu ile eşdeğerdir.



Frekans ortamında, kesme frekansının x'in birim değeri için 0.5 devir olduğu açıktır. Bu tanımlanmayla, frekans ortamında alçak geçiş bantlı bir süzgeç verilmiştir. İleride Fourier dönüşümü ve evrişim(konvolüsyon) işlenirken,evrişim işleminin bir süzgeçleme olduğu, herhangi bir verinin Sinc x fonksiyonu ile evrişim işlemine sokulmasının alçak geçiş bantlı bir süzgeçlemeyle eşdeğer olduğu gösterilecektir.

Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

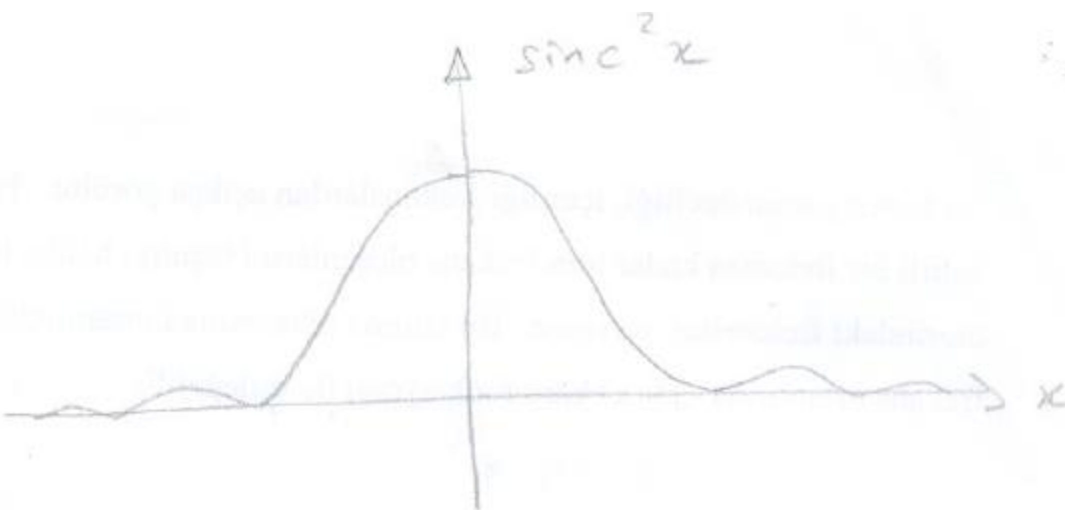
Alçak geçiş bantlı bir süzgeçleme yüksek frekans bileşenlerini ortadan kaldırdığından, Sinc x fonksiyonu, genel anlamda yuvarlatma fonksiyonu olarak da bilinir.

$$\mathrm{Sinc}^2\, x = (\sin \pi x / \pi x)^2$$

fonksiyonu da çok yaygın (Kullanımaları Vardır) olarak kullanılır. $\mathrm{Sinc}^2\, x$ 'de Sinc x 'in özelliklerini gösterir, yani,

$$\mathrm{Sinc}^2\, 0 = 1$$

$$\mathrm{Sinc}^2\, n = 0 \qquad n \neq 0$$ (tamsayı)



$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sinc}^2\, x = 1$$

$\mathrm{Sinc}^2\, x$ ' in Fourier dönüşümü üçgen fonksiyona eşdeğerdir.

Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

- IMPULS SEMBOLU

Doğada çok kısa zaman aralıklarında oluşan olayları, örneğin, bir nokta kaynaktan açığa çıkan enerjiyi tanımlamak için fizikte birim alana sıkışmış pulsların kullanılması çok eskiye gider. 1940'larda $\delta(x)$ 'in Dirac tarafından kullanılmasıyla bu tür fonksiyonlar "delta fonksiyonu" olarak anılmaya başlandı. Impuls fonksiyonu olarak ta bilinen Dirac Delta fonksiyonunun tanımında

$\delta(x) = 0 \quad x \neq 0$ ve

birim alana sıkışmayı simgeleyen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, ds = 1$$

koşulları vardır. Fakat bu tanımıyla $\delta(x)$ bir fonksiyon tanımlamaz. Tanım gerçekleştirmek için kare fonksiyonundan yararlanırız.

Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

$$\lim_{\tau \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{-1} \, \Pi\left(\frac{x}{\tau}\right) dx = 1$$

Bu tanımdaki fonksiyon, yüksekliği τ^{-1} ve tabanı τ olduğu halde birim alanlık bir kare fonksiyondur. τ parametresi yani taban sıfıra yaklasırken yüksekliği çok büyüyen bir birim alan pulsı oluşur. Impuls sembolle birim basamak fonksiyonu arasında aşağıdaki ilişki vardır.

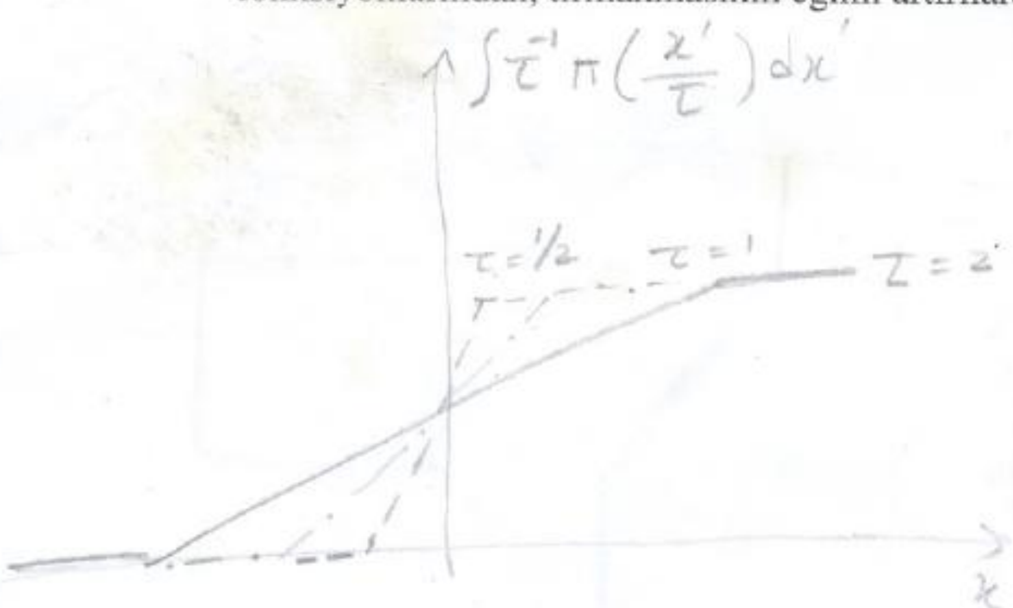
$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x) \, dx = H(x)$$

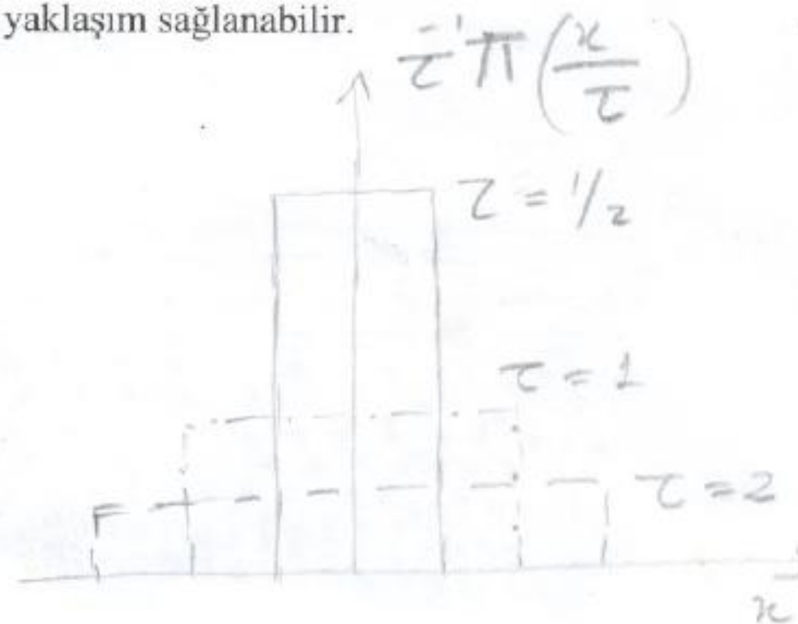
Benzer şekilde,

$$\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}$$

Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

yazılabilir. Bu sonuç, bizim için çok önemlidir. Bu sonuca göre basamak fonksiyonunun türevi, impuls sembole eşittir. Bu yorumun daha anlamlı olması için şu yaklaşımdan gidilebilir. Basamak fonksiyonun sıfır orijinindeki yani $x = 0$ daki türevinin anlamsızlığını gidermek için, basamak fonksiyonu yerine tırmanmalı basamak fonksiyonlarından, tırmanmasının eğimi artırılarak yaklaşım sağlanabilir.





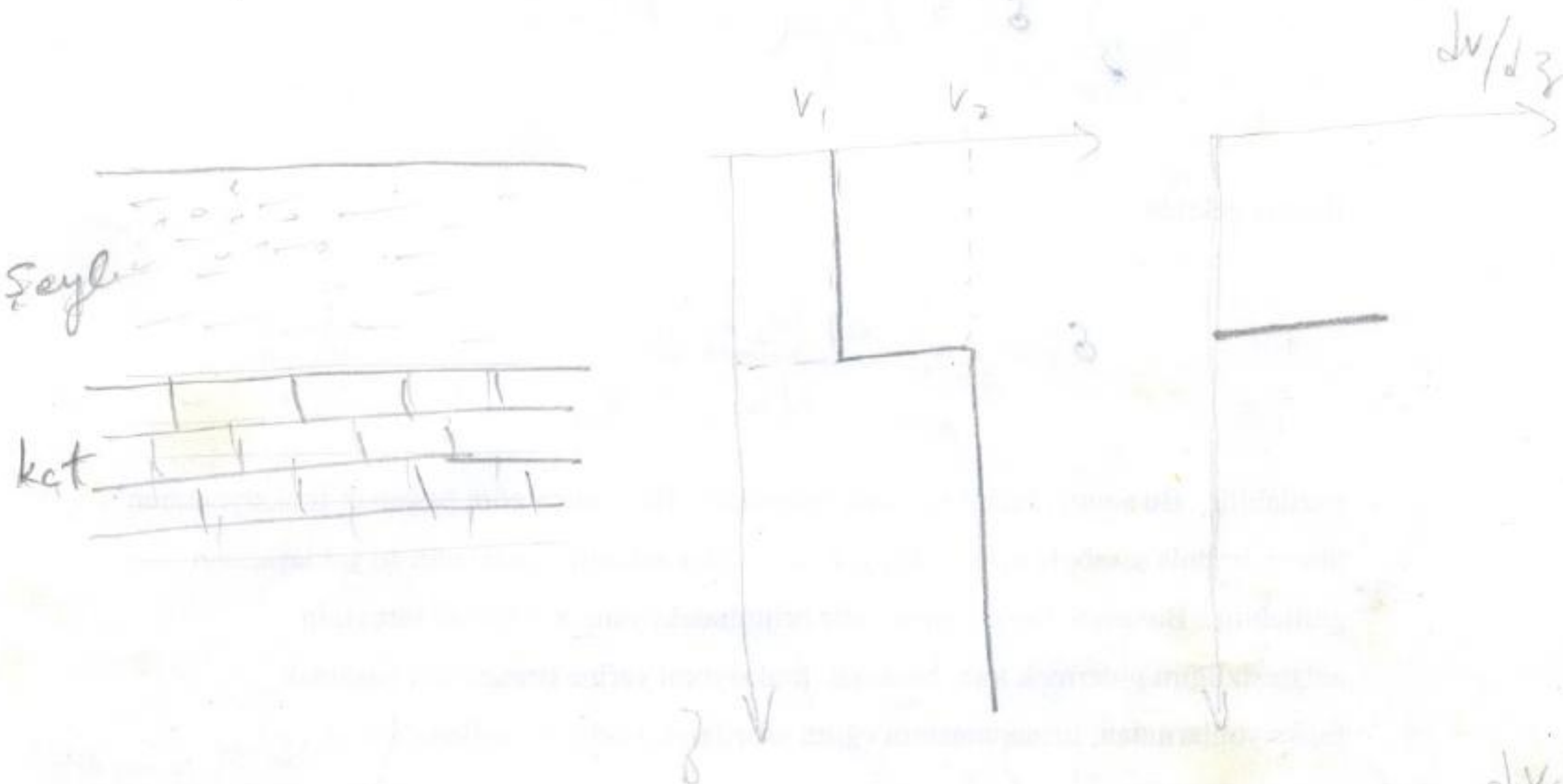
Görüldüğü gibi, tırmanmalı basamak fonksiyonunun eğimi büyüdükçe, bu fonksiyonun türevi impuls sembole, Dirac delta fonksiyonuna yaklaşmaktadır. Bu eğrilerden τ --> 0 için türevin, ideal Dirac Delta fonksiyonuna yaklaştığı görülür.

Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

Jeofizikle ilgili uygulamalarda jeolojik modeller, basamak fonksiyonları kullanılarak tanımlanır. Örneğin jeolojik modeller, sismik açıdan hız farklarına göre oluşturulacağından modeli oluşturan tabakaların ara hızları derinliğe göre grafiklendiğinde basamak fonksiyonları ortaya çıkar.

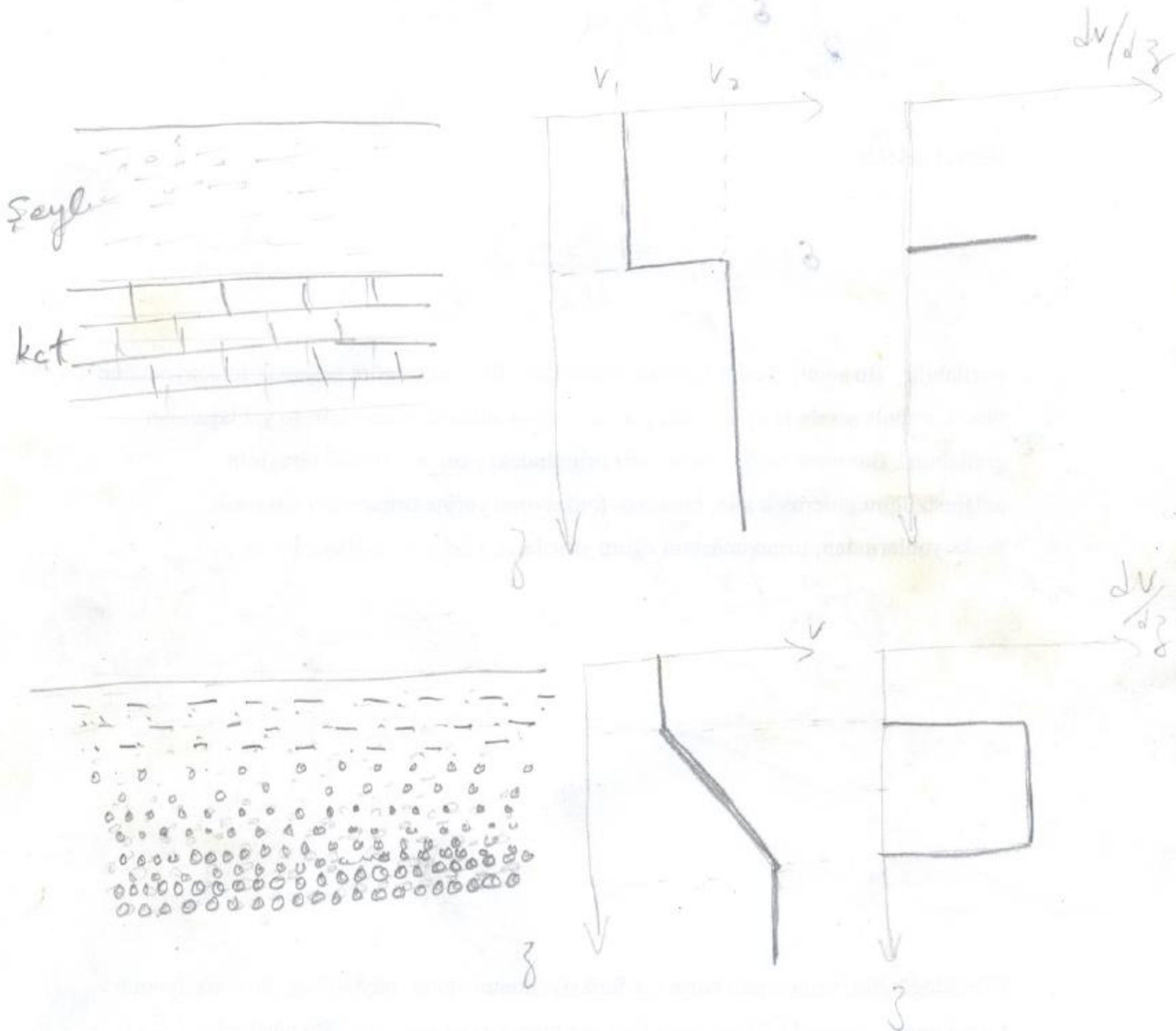
Jeolojik model

Jeofizik model



Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

Jeolojik model | Jeofizik model

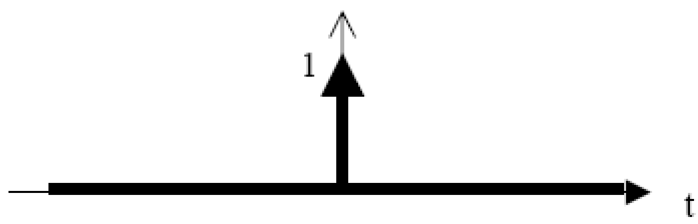


Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

Exercise 3: Unit Impulse Signal Generation

An impulse is defined as follows:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & elsewhere \end{cases}$$



The following Matlab program generates a unit impulse signal.

```
% Program W2E3.m
% Generating 64 Samples of a unit impulse signal
N=64;                       % Define the number of samples
n=-(N/2):((N/2)-1);         % Define a vector of sample numbers
x=zeros(1,N);               % Define a vector of zeros
x((N/2)+1)=1.0;             % Make the first sample to be 1 (i.e.at
t=0)
plot(n,x);                  % Plot the impulse
grid;
title('A Unit Impulse Signal');
xlabel('Sample Number');
ylabel('Amplitude');
```

Bazı Basit Fonksiyonların Tanımı

Exercise 3: Unit Impulse Signal Generation

An impulse is defined as follows:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & elsewhere \end{cases}$$