III. DOĞRUSAL DÜZENEKLER ve EVRİŞİM

DOĞRUSAL DÜZENEKLER (LINEAR SYSTEMS)

Veri İşlemle ilgili her olay iki anlamda ele alınabilir.

1)Süzgeçleme (filtering),
2)Öngörme – tahmin (prediction)

Her ikisi için de veri işlem, işlenecek verinin geçişini ve işlenmiş verinin oluşumunu sağlayan bir sistem olarak düşünülebilir. Bu anlamda sistem veya düzenek beli Rli bir verinin giriş olması halinde çıkışında veri elde edilen olayları gösterir.

III. DOĞRUSAL DÜZENEKLER ve EVRİŞİM

DOĞRUSAL DÜZENEKLER (LINEAR SYSTEMS)

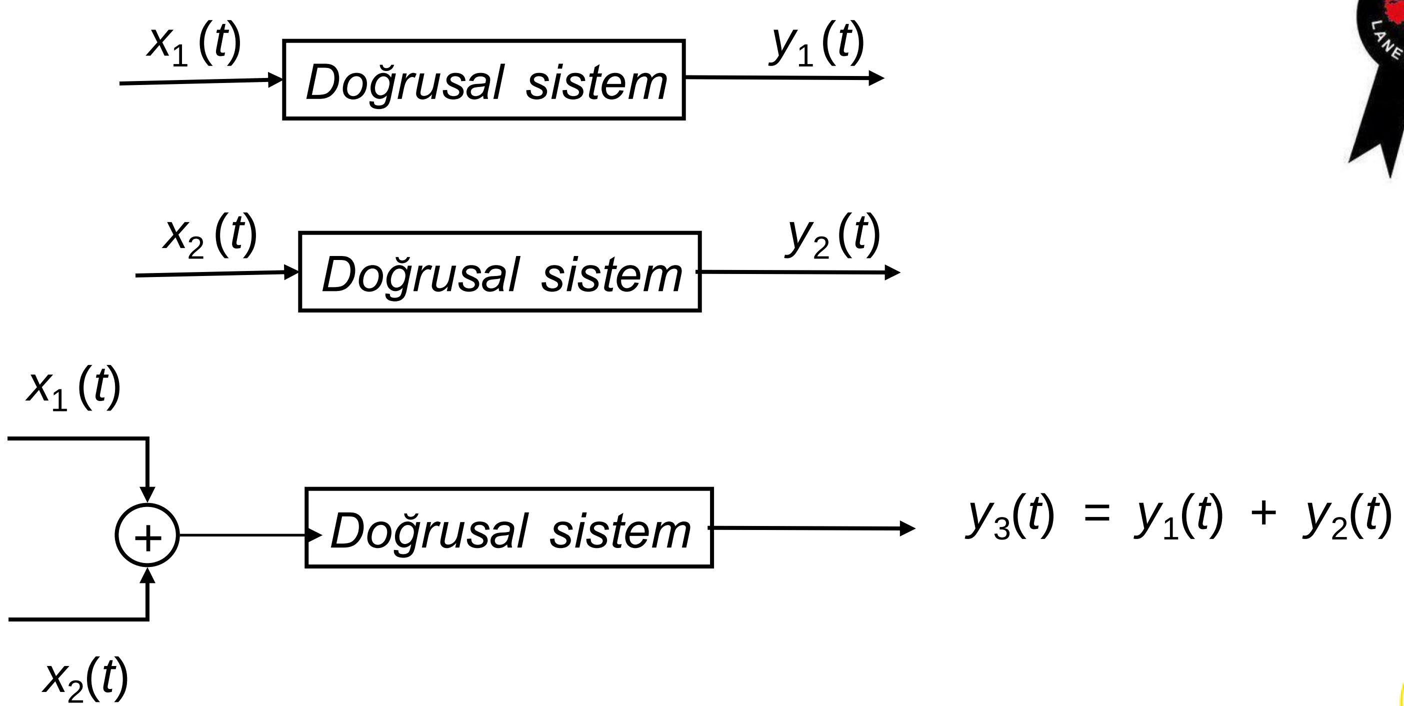
Bu tanıma göre sistemler; giriş, çıkış ile çıkış verisini oluşturan ortamdan oluşur. Sistemi tanımlamak için, sistemin giriş verilerine uyguladığı değişikliğin açık ve seçik olarak belirlenmesi gerekir.

Başka bir deyişle sistem, sistemin giriş ve çıkış verileri arasındaki ilişki olarak ta tanımlanabilir.

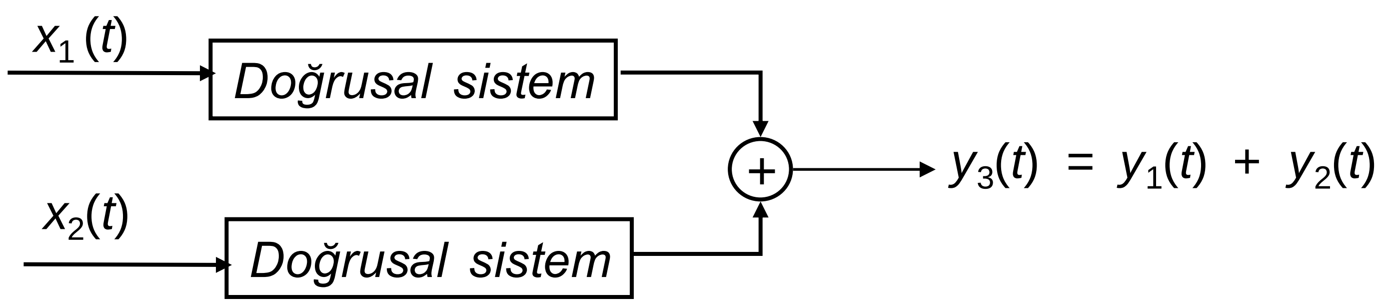
III. DOĞRUSAL DÜZENEKLER ve EVRİŞİM

Herhangi bir sistem aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu sisteme doğrusal sistem denir.

1) Toplama özelliği : Eğer söz konusu sistem $x_1(t)$ giriş verisiyle $y_1(t)$ çıkışını ve $x_2(t)$ giriş verisiyle de $y_2(t)$ çıkışını veriyorsa aynı sistemin $x_1(t) + x_2(t)$ giriş verisi için $y_1(t) + y_2(t)$ çıkışını vermelidir. Bu koşula göre, doğrusal düzeneklerde giriş verilerini toplayarak, sisteme giriş olarak verildiğinde elde edilen çıkış, giriş verileri ayrı ayrı verildiğinde elde edilen çıkışların toplamına eşdeğerdir.



III. DOĞRUSAL DÜZENEKLER ve EVRİŞİM

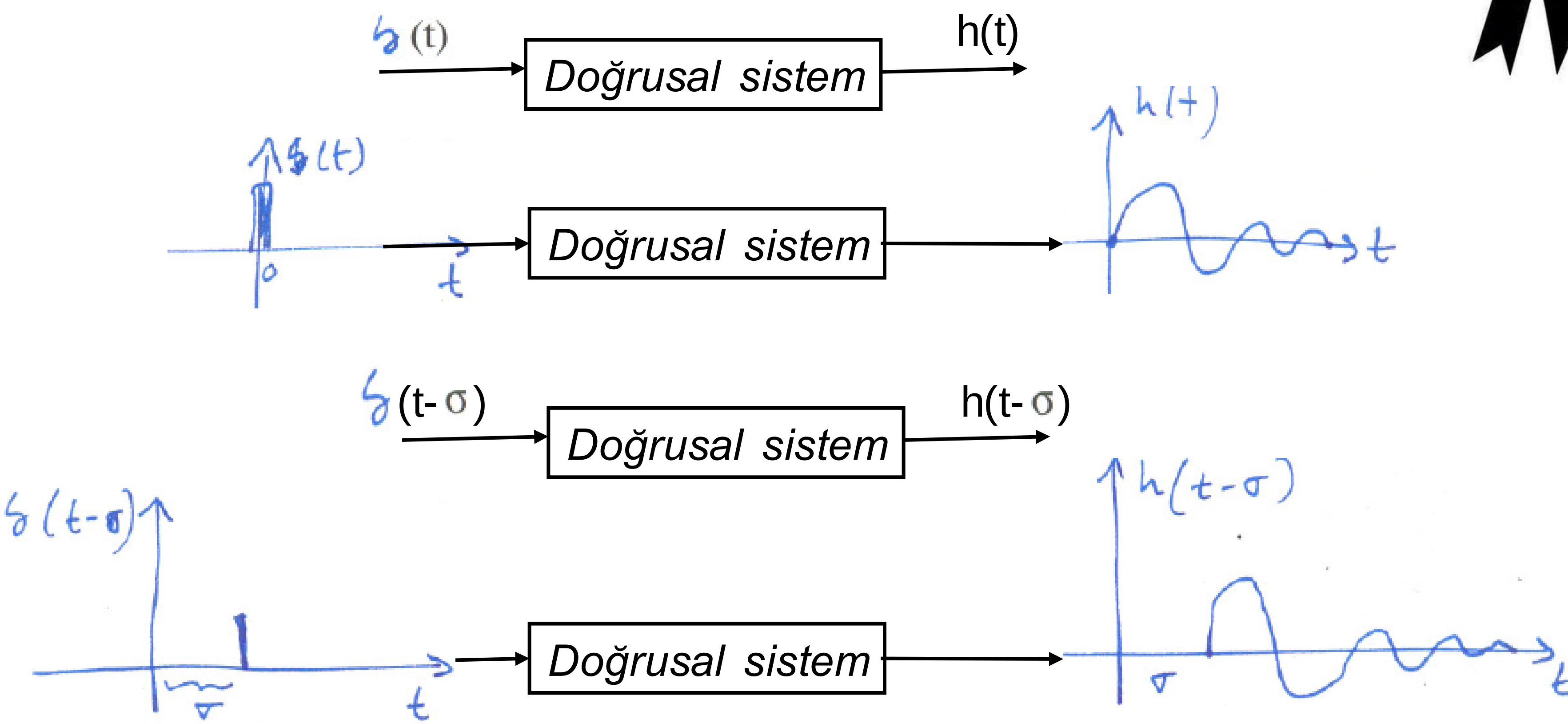


2) Çarpım özelliği : Bir doğrusal sistemin giriş verisi herhangi bir katsayıyla çarpıldığında çıkış verisi de aynı katsayı ile çarpılmış olur. Yani,

c, genel olarak karmaşık bir sayıdır.

III. DOĞRUSAL DÜZENEKLER ve EVRİŞİM

3) Sistemin girişindeki gecikme aynen çıkış verisinde de gözlenir.



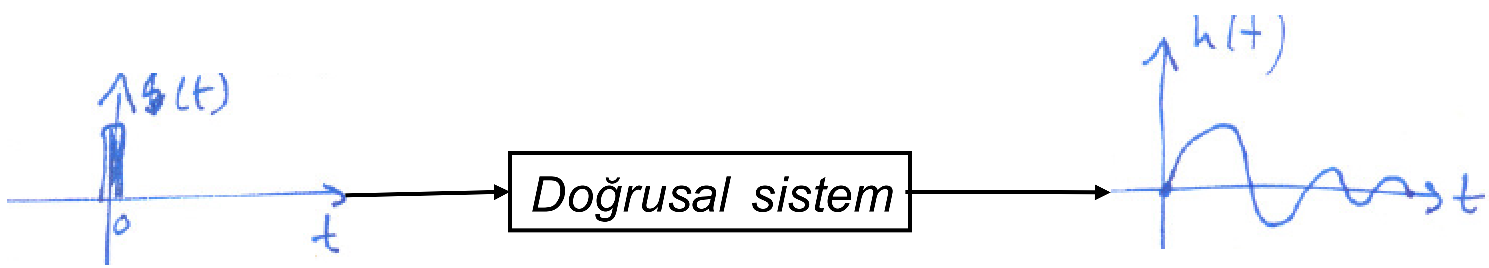
Buna göre, doğrusal sistemlerde sistemin karakteristiği, özellikleri zamanla değişmez. Doğrusal sistemler zamandan bağımsızdır.

III. DOĞRUSAL DÜZENEKLER ve EVRİŞİM

Bu özellikleri gösteren sistemlere doğrusal düzenekler (linear system), bu koşullara uymayan sistemlere de doğrusal olmayan düzenekler (non-linear system) denir.

Doğrusal düzenekler, giriş ve çıkış verileri arasındaki ilişkiyi tanımladığından, bilinen bir giriş verisinin yarattığı çıkış verisi sistemi belirleyen karakteristik olarak ele alınabilir. Sistemlerin karakteristiği, o sistemin birim-impuls fonksiyonunun yarattığı çıkış verisiyle belirlenebilir.

Bildiğimiz gibi, birim impuls fonksiyonu dikdörtgen fonksiyonun limiti sonucudur. Dikdörtgen dalganın yüksekliği A ve genişliği b ise A . B = 1 olduğundan n nin dt ye yaklaşması halinde A nın sonsuza gideceği ortadadır. Genel olarak, birim-impuls fonksiyonu $\delta(t)$ nın dt genişliğinde olduğu ve t = 0 da simetrik olarak yer aldığı öngörülür. $\delta(t)$ Bir çift fonksiyondur. Doğrusal bir düzeneğin giriş verisi $\delta(t)$ olduğunda, çıkış verisi h(t) olsun



III. DOĞRUSAL DÜZENEKLER ve EVRİŞİM

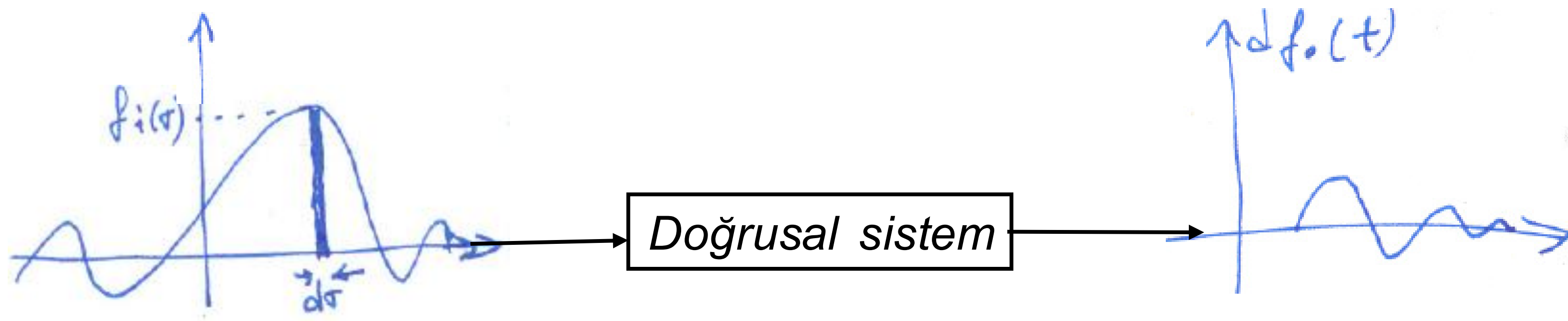
h (t) fonksiyonu doğrusal düzeneğin birim tepki fonksiyonu olarak bilinir ve doğrusal düzeneği karakterize eder. h (t) birim impuls tepki fonksiyonu olarak ta bilinir. Doğrusal düzeneğin girişinde $\delta(t)$ $t = 0$ anında uygulandığından $t < 0$ için sistemin çıkışında bir şey yoktur. Eğer özellikle koşul olarak verilmemişse, doğrusal düzenekler, $t < 0$ için dinlenmede sayılır. Doğrusal düzeneklerin bu özelliği kozalite (causality) olarak bilinir.

EVRİŞİM (KONVOLÜSYON) İŞLEMİ :

Dirac delta fonksiyonu için yukarıda sayılan davranışları gösteren doğrusal düzeneklerin bir $f_i(t)$ giriş fonksiyonuna davranışı, bu giriş fonksiyonu $d\sigma$ genişlikli birçok pulsdan oluşuyor öngörüsü ile incelenebilir. Bu incelemede doğrusal sistemlerin çarpım ve zamanla değişmezlik özelliklerinden yararlanılır.

$f_1(\sigma)$ → *Doğrusal sistem* → $f_i(t)$

III. DOĞRUSAL DÜZENEKLER ve EVRİŞİM



EVRİŞİM (KONVOLÜSYON) İŞLEMİ :

Dirac delta fonksiyonunun yarattığı çıkış, gecikme de dikkate alındığında $h(t-\sigma)$ ise, alanı $f_i(\sigma)d\sigma$ olan girişin yarattığı çıkışa $df_0(t)$ dersek, orantıdan (çarpım özelliği)

$$1 \longrightarrow h(t-\sigma)$$

$$f_i(\sigma)\, d\sigma \longrightarrow df_0(t)$$

$$df_0(t) \longrightarrow f_i(\sigma)\, h(t-\sigma)\, d\sigma$$

III. DOĞRUSAL DÜZENEKLER ve EVRİŞİM

yazılabilir. $d\sigma$ genişlikli bir elemanın çıkışı $df_0(t)$ ise, tüm giriş verisinin çıkışı integral alınarak bulunabilir. Buna göre,

$$f_0(t) = \int f_i(\sigma)\, h(t-\sigma)\, d\sigma$$

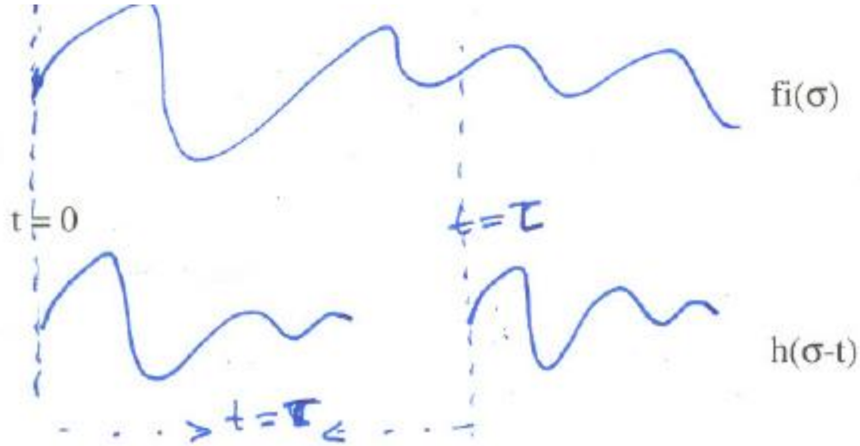
ile verilir. Bu integrale EVRİŞİM İNTEGRALİ denir. Buna göre fiziksel bir doğrusal sistemin matematiksel anlamı evrişim işlemidir. Diğer bir deyişle, doğrusal sistemlerin fiziksel olarak yaptıkları süzgeçlemenin matematiksel karşılığının evrişim işlemi olduğunu gösterir.

Evrişim integrali, bilinen çapraz ilişki integraliyle büyük bir benzerlik gösterir. $f_i(\sigma)$ İle $h(\sigma)$ arasındaki çapraz ilişkiyi yazacak olursak

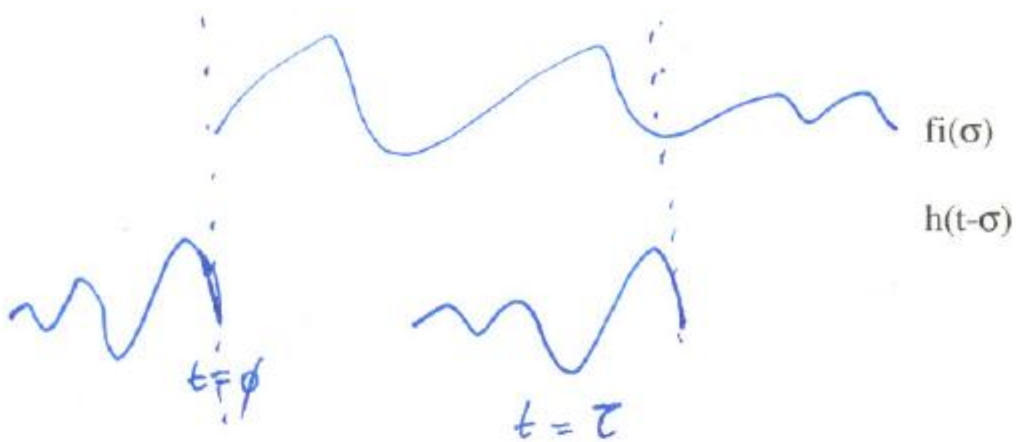
$$\int f_i(\sigma)\, h(\sigma - t)\, d\sigma$$

olurki, bu integralin evrişim integralinden tek farkı, çapraz ilişkideki $h(\sigma - t)$ Evrişim integralinde $h(t-\sigma)$ şeklinde yer almasıdır. Çapraz ilişkiyi

III. DOĞRUSAL DÜZENEKLER ve EVRİŞİM



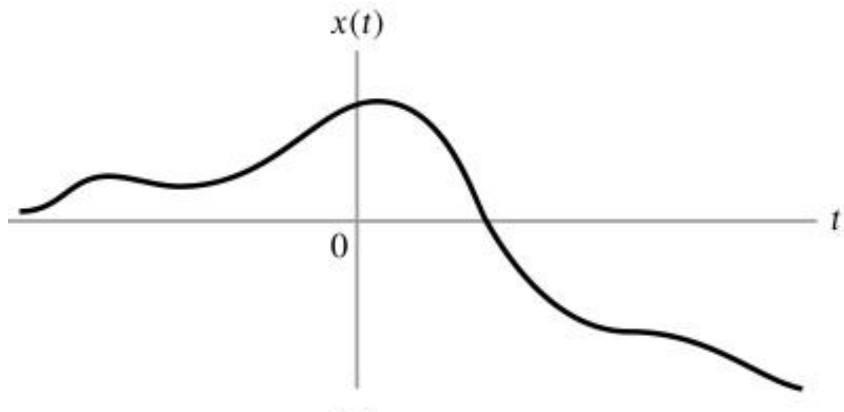
şeklinde gösterdiğimiz halde, evrişim işlemi

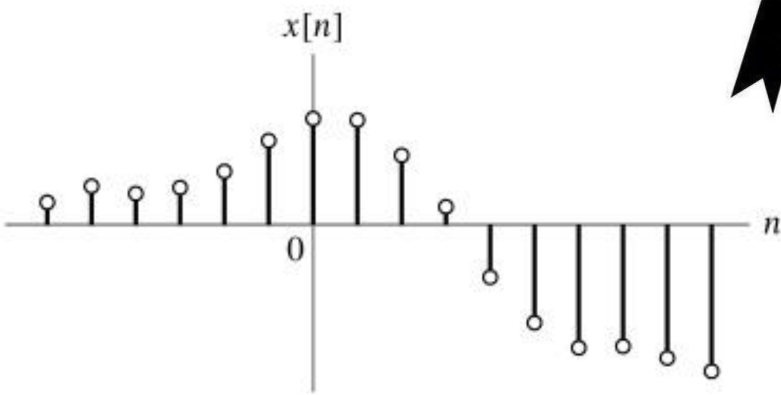


şeklindedir. Buna göre evrişimin çapraz ilişkiden farkı, ikinci fonksiyonun ters çevrilerek işleme konmasıdır. Fiziksel olarak da düzeneğe ilk giren ilk çıkacağından impuls fonksiyonunu ters çevirmek gerekiyor.

III. DOĞRUSAL DÜZENEKLER ve EVRİŞİM

Evrişim işlemini daha ayrıntılı tartışabilmek için, teorisine girmeden önce verilerin örneklenmesine göz atalım. Örnekleme işlemi sürekli (analog) verilerden sayısal verilere geçiş demektir. Herhangi bir verinin devamlı fonksiyon (a) yerine, belirli zaman aralıklarıyla genliklerinin verilmiş olması halinde bu veriye (b) sayısal veri diyoruz.





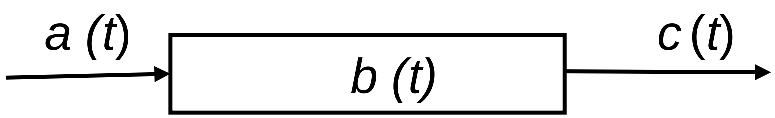
(a) Zamanın bütün değerleri için tanımlı, sürekli veri $x(t)$,

(b) $x(t)$ nin $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ değerleri için $x[n] = x(nT_s)$ olarak tanımlı sayısal hali. T_s , örnekleme periyodu.

III. DOĞRUSAL DÜZENEKLER ve EVRİŞİM

Böyle bir veri $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, a_n)$ şeklinde verilebilir.

Şimdi önce evrişim integralini sayısal veri için yazalım. Sayısal veri olarak doğrusal düzeneğin girişi, $a(t) = (a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$



impuls tepki fonksiyonu

$b(t) = (b_0, b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

ve çıkış verisi de

$c(t) = (c_0, c_1, c_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

olsun.

III. DOĞRUSAL DÜZENEKLER ve EVRİŞİM

Sayısal veri için Evrişim,

$$c_t = \sum_{s=0}^{t} a_s b_{t-s} = a * b$$

yazılabilir. Bu işlemi anlayabilmek için örnek verilerin boylarını seçelim ve

a (t) = (a_0, a_1, a_2, a_3)

b (t) = (b_0, b_1, b_2) olsun, çıkış verisi

c (t) = (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) için yukarıdaki bağıntı yardımıyla

III. DOĞRUSAL DÜZENEKLER ve EVRİŞİM

$$c_0 = a_0 b_0$$
$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$
$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$
$$c_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$$
$$c_4 = a_2 b_2 + a_3 b_1$$
$$c_5 = a_3 b_2$$

elde edilir. Görüldüğü gibi b fonksiyonu ters çevrilerek işleme kondurulmuştur.

III. DOĞRUSAL DÜZENEKLER ve EVRİŞİM

$a(t) = (3, 2, 3, 1)$

$b(t) = (4, -1, 1)$ *olsun, çıkış verisi*

$c_0 = 12$

$c_1 = -3 + 8 = 5$

$c_2 = 3 + -2 + 12 = 13$

$c_3 = 2 + -3 + 4 = 3$

$c_4 = 3 + -1 = 2$

$c_5 = 1$

$c = 12, 5, 13, 3, 2, 1$

elde edilir. Evrişim işleminde çıkışın veri boyu, giriş verisinin boyu ve impuls tepki fonksiyonunun boylarının toplamının bir eksiği kadardır.

III. DOĞRUSAL DÜZENEKLER ve EVRİŞİM

Almanca'da Faltung (folding) kelimesinin karşılığı olan evrişim, bir katlamalı çarpım işlemidir. Ve tablo yoluyla da gösterilebilir.

$c = a * b$	a_0	a_1	a_2	a_3
b_0	$a_0 b_0$	$a_1 b_0$	$a_2 b_0$	$a_3 b_0$
b_1	$a_0 b_1$	$a_1 b_1$	$a_2 b_1$	$a_3 b_1$
b_2	$a_0 b_2$	$a_1 b_2$	$a_2 b_2$	$a_3 b_2$

elde edilir. Evrişim işleminde çıkışın veri boyu, giriş verisinin boyu ve impuls tepki fonksiyonunun boylarının toplamının bir eksiği kadardır

III. DOĞRUSAL DÜZENEKLER ve EVRİŞİM

Evrişim işlemi hareketli çarpma ve toplama işlemi olarak da ele alınabilir.

$\boxed{a_0 \quad a_1 \quad a_2}$

$\boxed{b_2 \quad b_1 \quad b_0}$ $\qquad c_0 = a_0 b_0$

$\boxed{a_0 \quad a_1 \quad a_2}$

$\boxed{b_2 \quad b_1 \quad b_0}$ $\qquad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$

$\boxed{a_0 \quad a_1 \quad a_2}$

$\boxed{b_2 \quad b_1 \quad b_0}$ $\qquad c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$

$\boxed{a_0 \quad a_1 \quad a_2}$

$\boxed{b_2 \quad b_1 \quad b_0}$ $\qquad c_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1$

$\boxed{a_0 \quad a_1 \quad a_2}$

$\boxed{b_2 \quad b_1 \quad b_0}$ $\qquad c_4 = a_2 b_2$

III. DOĞRUSAL DÜZENEKLER ve EVRİŞİM

Genlik değerlerinin 1 birimlik zaman aralıklarıyla alınması halinde veriyi, örneğin

Genlik = 4 2 0 3 0 2

Zaman = 0 1 2 3 4 5

(4, 2, 0, 3, 0, 2)

şeklinde katsayılarla verebiliriz. Her katsayı belirli bir zamandaki genliği gösterdiğine göre, birim zaman gecikmesini z ile ve iki birim gecikmeyi z^2 gösterirsek, ve diğer gecikmeleri de benzer şekilde gösterirsek verimiz, polinom olarak

$$4 + 2z + 0 \cdot z^2 + 3z^3 + 0z^4 + 2z^5$$

şeklinde yazılabilir.

III. DOĞRUSAL DÜZENEKLER ve EVRİŞİM

Sistemin giriş, çıkış ve tepki fonksiyonunu polinom olarak alırsak, evrişimin bir polinom çarpma işlemi olduğunu görürüz.

$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$
$B(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$

ise

$$C(z) = A(z).B(z) = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2) \cdot (b_0 + b_1 z + b_2 z^2)$$
$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) z^3 + (a_2 b_2) z^4$$

Verilerin polinom olarak gösterimi z transformu olarak bilinir. Polinom kullanılarak evrişim işlemi için aşağıdaki özellikler verilebilir.

1) $a * b = b * a$
$A(z) B(z) = B(z) \cdot A(z)$ yer değiştirme öz.

2) $(a * b) * c = a * (b * c)$ associative öz. (birleşme)

3) $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$. dağılma öz.